This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

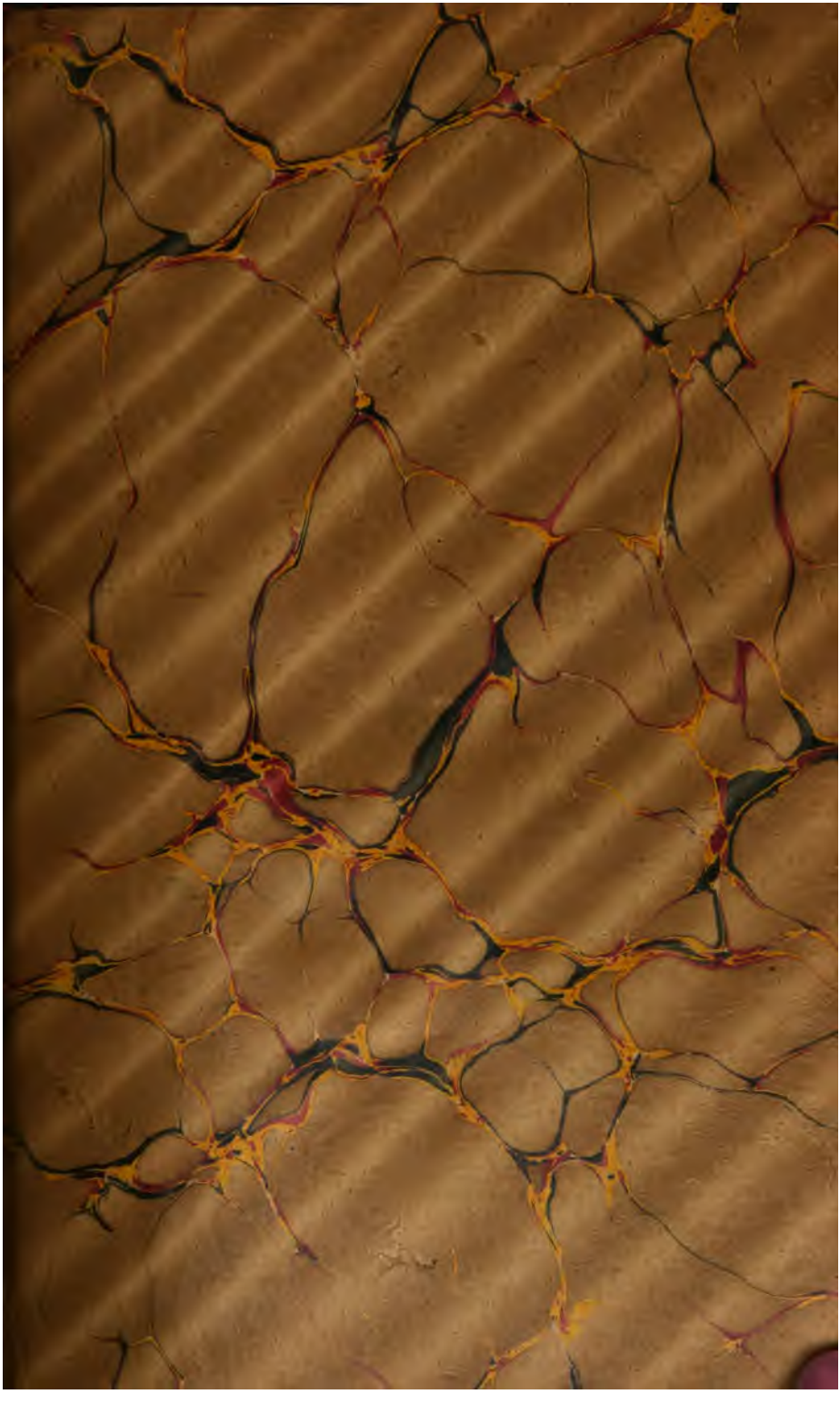
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE
DEPARTMENT
OF
ENGINEERING



TA
473
.P56

4937-1
2

MANUEL PRATIQUE

POUR L'ÉTUDE ET LE CALCUL

DES

RESSORTS EN ACIER

EMPLOYÉS

DANS LE MATÉRIEL DES CHEMINS DE FER.

PAR M. Edouard PHILLIPS,

INGÉNIEUR DES MINES.

PARIS.

CARILIAN-GOEURY ET Vor DALMONT,

Libraires des Corps des Ponts et Chaussées et des Mines,

QUAI DES AUGUSTINS, 49.

1852

PARIS. — IMPRIMÉ PAR E. THUNOT ET Cᵉ
Rue Racine, 26, près de l'Odéon.

PRÉFACE.

J'ai publié, tout récemment, un mémoire sur les ressorts en acier employés dans le matériel roulant des chemins de fer. Ce travail, qui a demandé près de trois ans d'efforts pour le mener à fin, exige nécessairement une certaine attention pour le bien comprendre et pour que les ingénieurs et les constructeurs puissent en retirer le fruit que l'on peut, je pense, en attendre. Il m'a donc semblé qu'il serait utile de publier un exposé simple, élémentaire et dans lequel je placerais toutes les règles auxquelles je suis parvenu; mais où, tout en les mettant sans exceptions, je n'introduirais aucune des formules, aucun des calculs souvent forcément assez compliqués qui sont nécessaires pour la démonstration. De cette manière, j'ai pensé faire connaître aux praticiens les lois et les règles sans qu'ils soient obligés de consacrer à l'étude des démonstrations un temps précieux. Ceux qui, néanmoins, éprouveraient le désir de lire les démonstrations et de se convaincre de leur exactitude n'auront qu'à recourir au mémoire que j'ai cité plus haut et qui est

inséré dans les *Annales des mines*, 5e série, t. I, 1852, p. 195.

Ce manuel a été rédigé, sous ma direction, par M. Bournique, chef du matériel roulant des wagons du chemin de fer de l'Ouest, qui y a apporté le soin le plus consciencieux et toute la connaissance qu'il a maintenant de la théorie des ressorts.

E. PHILLIPS.

MANUEL PRATIQUE

POUR

L'ÉTUDE ET LE CALCUL

DES RESSORTS EN ACIER

EMPLOYÉS

DANS LE MATÉRIEL DES CHEMINS DE FER.

PRÉLIMINAIRES.

Dans un ressort il y a toujours deux choses à considérer :

La première est la douceur du ressort, c'est-à-dire sa *flexibilité*, ou, ce qui revient au même, la diminution de flèche qu'il éprouve sous une charge déterminée. Par conséquent, un ressort est d'autant plus doux ou plus *flexible*, que pour un même poids la diminution de flèche est plus grande.

La seconde est la résistance propre du ressort, c'est-à-dire la plus grande charge ou le plus grand choc que celui-ci puisse supporter sans que son *élasticité* soit altérée.

L'*élasticité* est la propriété qu'a un ressort ou une feuille d'acier de reprendre, après une charge ou un

choc, la flèche qu'avait primitivement ce ressort ou cette feuille d'acier.

La flèche primitive se désigne ordinairement par *flèche de fabrication*.

Un ressort étant donné, on ne peut lui faire subir, sans altérer son élasticité, qu'une certaine charge, ou en d'autres termes, on ne peut faire travailler l'acier que jusqu'à un certain degré. Ce qui sert à mesurer ce degré de travail de l'acier est ce qu'on appelle *l'allongement proportionnel* désigné dans les formules par la lettre α.

Ainsi, plus on fait subir à un ressort ou à une feuille de ressort de fortes pressions, *plus l'allongement augmente*, ou encore plus l'acier du ressort approche de sa limite d'élasticité. *C'est donc l'allongement que l'on peut faire subir à l'acier, sans que son élasticité soit altérée, qui limite la résistance d'un ressort.*

L'expérience seule peut servir à déterminer quel est l'allongement le plus fort qu'on puisse faire subir aux feuilles d'un ressort sous la *charge normale* (c'est-à-dire sous la charge ordinaire habituelle qu'il supporte), sans que le ressort se déforme, ou sans qu'il éprouve de perte constante de flèche. Jusqu'à présent on a limité cet allongement entre 0,002 et 0,003, le plus habituellement entre 0,0022 et 0,0025.

On considère aussi 0,005 comme l'allongement correspondant à la limite d'élasticité de l'acier; par conséquent cet allongement détermine *la charge maxima* que l'on peut faire subir au ressort sans que son élasticité soit altérée.

Dans les formules qui suivront, M exprime le *moment d'élasticité* d'une feuille. L'expression algébrique de ce moment est

$$M = \frac{Eae^3}{12},$$

formule dans laquelle E est le coefficient d'élasticité de l'acier, qui est égal à 20.000.000.000, valeur constante; a est la largeur de la feuille, en mètre ou fraction de mètre, et e est son épaisseur.

Le moment d'élasticité d'une feuille est donc proportionnel à sa largeur et au cube de son épaisseur.

Remarque. En cherchant le moment d'élasticité d'une feuille d'acier de $0^m,01$ d'épaisseur sur $0^m,075$ de largeur, on trouve que $M = 125$. Ce moment étant connu, si l'on veut connaître le moment d'élasticité d'une feuille ayant une épaisseur quelconque, mais dont la largeur soit toujours la même, 0,075, il n'est pas nécessaire de substituer dans la formule $\frac{Ea e^3}{12}$ toutes les valeurs numériques. En effet, $\frac{Ea}{12}$ donnant, par le fait que a ne change pas, une valeur constante, il s'ensuit que le moment d'élasticité varie seulement comme le cube de l'épaisseur des feuilles. Donc, pour avoir le moment d'élasticité d'une feuille quelconque ayant $0^m,075$ de largeur, il faut multiplier 125 par le rapport du cube des épaisseurs, c'est-à-dire que l'on a :

$$M_1 = \frac{e_1^3}{(0,01)^3} \times 125,$$

ou encore plus simplement, faire le cube de l'épaisseur en prenant le millimètre pour unité, et diviser par 8. Ainsi le moment d'élasticité d'une feuille de $0^m,011$ par exemple, sera :

$$M = \frac{11^3}{8} = \frac{1331}{8} = 166,375.$$

Valeurs numériques de divers moments d'élasticité pour des feuilles de 0^{m},075 de largeur.

ÉPAISSEUR des feuilles en millimètres.	VALEURS correspondantes de M.	ÉPAISSEUR des feuilles en millimètres.	VALEURS correspondantes de M.
6	27,00	11	166,375
7	42,875	12	216,000
8	64,00	13	274,625
9	91,125	14	343,000
10	125,00	15	421,875

Si on voulait avoir maintenant les moments d'élasticité des feuilles de largeurs différentes de 0^{m},075, il suffirait de multiplier les moments obtenus par le rapport des largeurs, car M, dans la formule $\frac{Eae^3}{12}$, est proportionnel à a. Ainsi le moment d'élasticité d'une feuille de 12 millimètres d'épaisseur sur 90 millimètres de largeur sera :

$$M = 216 \times \frac{90}{75} = 216 \times \frac{6}{5} = 259.20.$$

Celui d'une feuille de 0^{m},006 sur 0^{m},050 sera :

$$27 \times \frac{50}{75} = 18.$$

Par ce moyen il est donc très-simple de déterminer le moment d'élasticité d'une feuille quelconque.

Principes démontrés par les formules (*).

1° Quand toutes les feuilles d'un ressort sont en contact, la *flexion est proportionnelle à la charge*, quel que soit le type du ressort. C'est-à-dire que si sous 1.000 kilogrammes, par exemple, un ressort perd 0^{m},025, sous 2.000 kilogrammes la diminution de flèche sera de 0^{m},05, ou le double.

(*) Voir le mémoire sur les ressorts, imprimé dans les *Annales des mines*, 5^{e} série, t. I, 1852, p. 195.

2° La flexion d'un ressort est indépendante de la courbure initiale des lames, ainsi que des longueurs de celles-ci au delà du point dont on cherche la flexion.

3° Les allongements qu'éprouvent les lames d'un ressort sont également indépendants de la courbure initiale de ces feuilles.

4° Le volume, et par suite le poids d'un ressort à feuilles de même épaisseur (*), varie proportionnellement à sa flexibilité et au quarré de sa résistance absolue, résistance qui est toujours mesurée par l'allongement produit.

Il résulte de là que si deux ressorts à feuilles de même épaisseur, devant servir soit comme suspension, ou comme traction ou comme choc au même appareil, ne sont pas du même poids (en supposant, bien entendu, qu'ils soient calculés d'après les mêmes règles); c'est que le plus léger des deux ressorts a une flexibilité moindre, ou que l'acier de ce ressort, *sous une même charge*, travaille à un plus fort allongement.

En fait de ressorts à feuilles de mêmes épaisseurs, il n'y a donc pas de ressorts plus ou moins légers, il y a des ressorts ayant plus ou moins de flexibilité et sous une charge déterminée éprouvant des allongements plus ou moins grands.

(*) Ce type est décrit chapitre I.

CHAPITRE PREMIER.

Description des différents types de ressorts.

On distingue trois espèces de ressorts : *les ressorts de suspension*, *les ressorts de traction* et *les ressorts de choc*. Chaque espèce comprend en outre différents types qu'il est utile de faire connaître.

Remarque générale.

La forme du ressort ou la courbure des lames n'ayant, comme il a été dit dans les préliminaires, aucune influence sur la flexibilité et sur la résistance propre du ressort, il y a par conséquent avantage à choisir la forme la plus simple et la plus facile à obtenir, cette forme est évidemment l'arc de cercle. Tous les types de ressorts que je vais décrire sont donc cintrés suivant cette courbe. Mais en même temps on peut, si l'on veut, changer la courbure, et cela se fait habituellement aux extrémités.

RESSORTS DE SUSPENSION.

Type n° 1.

Ressorts à feuilles d'égale épaisseur.

Ces ressorts sont composés de feuilles ayant toutes les mêmes épaisseurs, cintrées sur le même rayon et ayant des étagements égaux entre eux. Si ces ressorts, en leur milieu, n'étaient reliés au véhicule qu'ils suspendent par aucune bride ou collier, la dernière feuille devrait être égale au plus au double de l'étagement.

La *fig.* 1 représente un ressort de ce type adapté à des wagons à ballast du chemin de l'Ouest. Les conditions suivant lesquelles ces ressorts sont établis sont les suivantes :

Charge normale.	2.000^{k},00
Flexibilité par 1.000 kil. .	0^{m},0275
Charge d'aplatissement. .	4.500^{k},00
Poids du ressort.	27^{k},50

La *fig.* 2 représente un ressort à pincettes de petit coupé pour quatre personnes. Ce couple de ressorts répond aux conditions suivantes :

Charge normale (poids de la voiture sans le train et de quatre personnes).	130^{k},00
Flexibilité par 100 kil. de chaque ressort.	0^{m},032
— pour les deux.	0^{m},064
Charge d'aplatissement pour chaque ressort, . .	260^{k},00
Poids de chaque ressort (non couplé).	2^{k},80

Type n° 2. **Ressorts à feuilles sensiblement de même épaisseur.**

Dans ces ressorts toutes les feuilles sont décrites d'un même centre, c'est-à-dire que les rayons de chaque feuille vont en croissant successivement d'une quantité égale à l'épaisseur de la feuille précédente. Or les épaisseurs des feuilles, ainsi qu'on le verra plus loin, étant proportionnelles aux rayons, l'allongement étant supposé constant, il s'ensuit que ces épaisseurs vont en croissant, mais *d'une quantité très-faible*, ce qui fait dire que les feuilles sont sensiblement de la même épaisseur. Dans ces ressorts les étagements vont aussi en croissant du haut vers le bas du ressort ou des longues feuilles aux plus courtes.

Les rayons des feuilles augmentant successivement, comme je viens de le dire, d'une quantité égale à la feuille précédente, il s'ensuit encore que ces ressorts sont assemblés sans aucune bande.

Type n° 3. **Ressorts à feuilles d'épaisseurs décroissantes.**

Dans ces ressorts, la première ou maîtresse feuille a la plus forte épaisseur; cette épaisseur va ensuite en diminuan td'une quantité plus ou moins grande pour toutes les autres feuilles.

Cependant il n'est pas nécessaire que toutes les feuilles soient d'épaisseurs différentes, il peut y en avoir dans chaque catégorie un certain nombre de la même épaisseur.

Le rayon de fabrication des feuilles étant, comme on le verra aussi plus loin, proportionnel à l'épaisseur des feuilles, il en résulte que, quand ces ressorts sont assemblés, il y a une bande plus ou moins forte entre toutes les feuilles.

Or le calcul démontre que cette bande tend à faire bâiller le ressort jusqu'à ce qu'il soit aplati. Il faut donc faire en sorte que la charge normale de ces ressorts corresponde à leur aplatissement. On verra plus loin qu'il est toujours possible qu'il en soit ainsi. Il est une remarque utile à faire, c'est que le poids d'un ressort construit d'après ce principe est égal au poids d'un ressort à feuilles d'égale épaisseur qui aurait la même flexibilité et la même résistance.

La *fig.* 3 représente un ressort de ce type, exécuté pour des wagons à marchandises du chemin de l'Ouest. Les conditions suivant lesquelles ces ressorts sont établis sont les suivantes :

Charge normale et d'aplatissement.	2.000^{k},00
Flexibilité par 1.000 kil.	0^{m},024
Poids du ressort.	26^{k},00

Type n° 4. **Ressorts à feuilles d'épaisseurs croissantes.**

Ces ressorts sont exactement l'inverse de ceux du type précédent, c'est-à-dire que la première ou maîtresse feuille a la plus petite épaisseur et que cette épaisseur va en augmentant successivement d'une quantité plus ou moins grande pour toutes les autres feuilles. On peut également donner la même épaisseur à un certain nombre de feuilles.

Toujours contrairement au type qui précède, quand

ces ressorts sont assemblés, mais non chargés les feuilles ne se joignent entre elles qu'au centre, puisque les rayons de courbure des feuilles augmentent avec leur épaisseur. Ces ressorts ne tendent à bâiller qu'au delà de l'aplatissement. Il y a cependant aussi avantage à faire aplatir ces ressorts sous la charge normale ou habituelle, car c'est seulement en ce point que l'allongement est le même pour toutes les feuilles. Le poids de ce ressort est aussi sensiblement égal au poids d'un ressort à feuilles d'égale épaisseur répondant aux mêmes conditions.

La *fig.* 4 représente un ressort de ce type exécuté également pour le chemin de l'Ouest. Les conditions suivant lesquelles ces ressorts sont établis sont les suivantes :

Charge normale et d'aplatissement.	2.000^{k},00
Flexibilité par 1.000 kil.	0^{m},027
Poids du ressort.	27^{k},00

Type n° 5. **Ressorts à auxiliaires.**

Ces ressorts sont formés de deux parties bien distinctes, la première appelée *ressort proprement dit* est composée d'un certain nombre de feuilles de même épaisseur ou d'épaisseurs inégales, cette première partie travaille *seule* sous la charge normale et se conduit comme un ressort ordinaire à feuilles d'égales ou d'inégales épaisseurs ; la deuxième partie appelée *auxiliaire* peut être composée d'un certain nombre de grosses feuilles, le plus souvent d'une seule qui, presque toujours, peut être en fer et quelquefois en bois. Cet auxiliaire se sépare d'avec le ressort proprement dit, avec lequel il n'est en contact qu'au centre, jusqu'au maximum de la charge normale. Cette deuxième partie du ressort ne commence à travailler qu'au delà de la charge habituelle, c'est-à-dire lorsque le ressort proprement dit ne serait plus assez fort pour supporter un excédant

de charge momentanée provenant des oscillations ou d'une cause quelconque. Cette deuxième partie sert donc bien d'auxiliaire à la première.

Le principal avantage de ce type de ressorts sur les précédents, c'est qu'étant calculé dans les mêmes conditions de flexibilité sous la charge normale et de résistance totale, il est toujours plus léger et partant coûte moins cher et d'autant moins que la partie en fer se paye à part. On peut remarquer encore qu'un pareil ressort doit amortir plus vite les oscillations et cela progressivement, puisque le ressort proprement dit vient se développer graduellement sur l'auxiliaire qui n'est que très-peu flexible.

Ce type de ressort étant complétement nouveau, il est nécessaire de bien définir dans quel esprit il est conçu.

Un ressort est toujours combiné de telle sorte que l'allongement correspondant à la limite d'élasticité de l'acier soit loin d'être atteint sous la charge normale, ou en d'autres termes de manière que, travaillant habituellement sous une charge de 2.000 kilogrammes, par exemple, il puisse subir, sans que son élasticité soit altérée, un effort accidentel de 4.000 à 4.500 kilogrammes. On comprend qu'il en soit ainsi, car autrement la charge normale pouvant augmenter accidentellement, soit pour les oscillations ou pour les surcharges, ou par une inégale répartition de la charge, l'allongement maximum de l'acier serait alors dépassé, et le ressort se casserait, ou tout au moins perdrait de sa flèche primitive.

Il résulte ainsi, par le fait, qu'un ressort devant travailler sous une charge habituelle déterminée, on l'établit toujours comme s'il devait fonctionner sous une charge beaucoup plus forte, ce qui conduit à faire des ressorts très-forts et partant très-lourds.

Mais s'il est nécessaire de donner à un ressort une résistance plus grande que celle correspondant à la charge normale, il est complétement inutile que le ressort conserve la même flexibilité au delà de cette charge, puisque ce n'est qu'accidentellement que cette charge est dépassée. Or comme le poids d'un ressort diminue proportionnellement à sa flexibilité, il s'ensuit que le ressort le moins lourd et partant le plus rationnel serait celui qui, tout en ayant la résistance nécessaire n'aurait la flexibilité demandée que jusqu'au point où elle est utile, c'est-à-dire jusqu'à la limite de la charge normale.

Ce sont justement ces conditions que remplit le ressort à auxiliaire.

La *fig.* 5 représente un ressort de ce type exécuté pour des wagons couverts à marchandises du chemin de fer de l'Ouest. Ces ressorts répondent aux conditions suivantes :

Charge normale.	2.200^{k},00
Flexibilité par 1.000 kil. jusqu'à 2.200.	0^{m},025
Charge d'aplatissement.	3.500^{k},00
Poids de la partie en acier.	26^{k},11
Poids de la partie en fer.	3^{k},17

RESSORTS DE TRACTION.

On peut faire, pour ce genre de ressorts, exactement les mêmes types que pour les ressorts de suspension.

FIG. 8. *Ressort de traction pour wagons à marchandises exécuté pour le chemin de l'Ouest.*

Charge normale.	2.000^{k},00
Flexibilité par 1.000 kil. jusqu'à 2.000.	0^{m},0208
Charge d'aplatissement.	5.000^{k},00
Poids de la partie en acier fondu. . . .	19^{k},30
Poids de la partie en acier ordinaire. .	5^{k},80

Ressorts de choc.

Tous les types décrits ci-dessus peuvent également

s'appliquer à cette espèce de ressorts. Ordinairement les ressorts de choc servent en même temps comme traction ; ils s'appellent alors *ressorts de choc et de traction.* Ces derniers, pour être dans de bonnes conditions, doivent être en même temps très-flexibles pour le choc et très-résistants pour la traction.

La *fig.* 9 représente un ressort de ce genre remplissant parfaitement sans augmentation de volume ou de poids ces deux conditions : flexibilité, et grande résistance. Il répond aux conditions suivantes : jusqu'à 1.000 kilogrammes sa flexibilité est de $0^{m},095$ par 1.000 kilogrammes, c'est-à-dire égale à celle des ressorts de choc les plus flexibles ; à partir de 1.000 kilogrammes la flexibilité va en décroissant ; à 1.500 kilogrammes elle est de $0^{m},05$ par 1.000 kilogrammes, et enfin sous 2.560, alors que toutes les feuilles sont en contact, la flexibilité n'est plus que $0^{m},032$. L'aplatissement du ressort a lieu sous la charge de 5.000 kilogrammes, et l'allongement correspondant de toutes les feuilles est alors de 0.004. Le poids du ressort est de 84 kilogrammes.

Tels sont les différents types de ressorts que dans la pratique on applique suivant les circonstances, et l'on résoudra facilement tous les cas possibles, car sur chaque type de ressort on peut en faire un nombre plus ou moins grand, qui, tout en répondant aux mêmes conditions de flexibilité et de résistance, peuvent, comme on le verra, ne pas être semblables entre eux.

CHAPITRE II.

Étude ou analyse d'un ressort quelconque.

Remarques préliminaires.

1° Si on coupe un ressort par son milieu, on a deux moitiés de ressort complétement *identiques* qui se conduisent évidemment sous des charges moitié moindres, absolument comme le ressort lui-même sous une charge double agissant en même temps aux deux extrémités. Par conséquent, on peut, pour simplifier les calculs, ne considérer qu'une moitié de ressort, et ne faire entrer dans les formules que les demi-longueurs des feuilles et la moitié des charges ; c'est ce qui aura lieu.

2° La longueur de la première feuille, d'après ce qui a été dit dans les préliminaires, ne doit être comptée qu'à partir des points de contact, c'est-à-dire des points où la charge est appliquée.

3° Pour analyser un ressort, il faut en connaître évidemment toutes les dimensions, la largeur, les longueurs et les épaisseurs des feuilles, les flèches ou les rayons de fabrication. Je supposerai donc toujours ces éléments connus.

J'entre maintenant dans le fond de la question.

Un ressort quelconque étant donné, il s'agit de déterminer : 1° *quelle est sa flexibilité ;* 2° *l'allongement qu'éprouvent les différentes feuilles sous la charge normale ;* 3° *la résistance absolue ;* c'est-à-dire, l'allongement éprouvé par les différents points du ressort sous une charge déterminée la plus grande possible.

Nous allons faire cette étude successivement pour tous les types définis dans le chapitre précédent.

1er type (fig. 1). 1° La flexibilité d'un ressort à feuilles d'égale épaisseur est donnée par la formule

$$(I) \qquad i = \frac{QL^3 l}{2M}$$

dans laquelle :

i exprime la perte de flèche ou la flexion sous la charge Q appliquée à chaque extrémité ;

L, la demi-longueur de la maîtresse-feuille ;

l, la longueur de l'étagement, qui est la même, comme il a été dit, pour toutes les feuilles ;

M, le moment d'élasticité d'une feuille (*).

Comme dans ce type de ressort la flexion est proportionnelle à la charge, on peut prendre pour valeur de Q un poids quelconque ; nous ferons toujours, pour déterminer la flexibilité, $2Q = 1000$ kil., de manière à avoir directement la flexibilité par 1.000 kilogrammes. Par conséquent $Q = 500$ kil. En substituant dans la formule ci-dessus les valeurs numériques s'appliquant au ressort pris pour exemple, on aura (**) :

$$i = \frac{500 \times (0.5)^3 \times 0.055}{2 \times 125} = 0{,}0275$$

où flexibilité du ressort par 1.000 kilogrammes.

2b L'allongement en un point quelconque de la maîtresse-feuille et sous une charge quelconque, est donné par la formule générale

$$(II) \qquad a = \frac{e}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho}\right).$$

(*) La flexion d'un ressort non étagé, c'est-à-dire, dont toutes les feuilles ont la même longueur est $i = \frac{QL^3}{3nM}$.

(**) Les valeurs numériques pour chaque ressort analysé sont données au chapitre III, se reporter à la figure et au type correspondants.

ρ est le rayon de courbure de la maîtresse-feuille au point que l'on considère et sous une charge déterminée, r est le rayon de fabrication.

On comprend même, sans la formule, que l'allongement augmente avec ρ ou avec le redressement progressif de la feuille. Quand cette feuille est horizontale ou que le ressort est aplati, alors ρ est infini, $\frac{1}{\rho}$ devient nul, et on a :

$$\alpha = \frac{e}{2} \times \frac{1}{r} = \frac{e}{2r},$$

d'où l'on tire :

$$e = 2r\alpha,$$

formule qui détermine l'épaisseur des feuilles en fonction du rayon et de l'allongement correspondant à l'aplatissement.

L'expression de la valeur de $\frac{1}{\rho}$, pour les ressorts composés de feuilles d'égale épaisseur, est

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{nM}{r} - Q(L - \lambda)}{nM}.$$

n exprime le nombre de feuilles situées dans la section transversale du point où l'on cherche l'allongement ; $L - \lambda$ donne la position de ce point, car λ est la distance du milieu du ressort au point que l'on considère. Si dans la formule

$$\alpha = \frac{e}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho}\right)$$

on substitue à $\frac{1}{\rho}$ la valeur ci-dessus, on aura :

$$\alpha = \frac{e}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{\frac{nM}{r} - Q(L - \lambda}{nM}\right),$$

d'où l'on tire :

$$\alpha = \frac{e}{2} \frac{Q(L - \lambda)}{nM},$$

formule plus simple.

L'allongement qui a lieu au milieu du ressort sera alors

$$\text{(III)} \qquad \alpha = \frac{eQL}{2nM},$$

puisque dans la formule ci-dessus λ devient nul.

Si maintenant nous appliquons cette formule au ressort (*fig.* 1) que nous considérons, l'allongement au milieu de la maîtresse-feuille, sous la charge normale de 2.000 kilogrammes sera donc

$$\alpha = \frac{0{,}01 \times 1000 \times 0{,}5}{2 \times 8 \times 125} = 0{,}0025.$$

Comme on le verra au chapitre III, le plus souvent il arrive que par le fait de la bride qui prend le ressort par son milieu, on peut supprimer une feuille. C'est ce qui a eu lieu pour ce ressort. L'allongement au milieu de la maîtresse-feuille, que nous venons de déterminer, est donc trop fort pour le ressort de neuf feuilles, il n'est en réalité que

$$\alpha = \frac{0{,}01 \times 1000 \times 0{,}5}{2 \times 9 \times 125} = 0{,}0022.$$

3° L'allongement étant proportionnel à la charge, si on prend 0,005 comme l'allongement maximum que l'acier puisse subir sans être altéré, la résistance absolue, ou la charge d'essai du ressort, pris pour exemple, sera donnée par la proportion

$$2.000 \text{ kil.} : 0{,}0022 :: x : 0{,}005;$$

d'où

$$x = \frac{2000 \times 0{,}005}{0{,}0022} = 4.545 \text{ kil.}$$

Telles sont les formules très-simples qui servent à

déterminer dans quelles conditions est établi un ressort quelconque à feuilles d'égale épaisseur.

1° L'expression générale de la flexion pour les ressorts à feuilles d'inégale épaisseur, est : 2e, 3e et 4e type.

(IV)

$$i = \frac{QL^3}{3}\left[\frac{1}{M} - \frac{M_1}{(M+M_1)M} - \frac{M_2}{(M+M_1+M_2)(M+M_1)} - \right.$$

$$\left. - \text{etc.} - \frac{M_{n-1}}{(M+M_1+\text{etc.}+M_{n-1})(M+M_1+\text{etc.}+M_{n-2})}\right] +$$

$$+ \frac{Q}{3}\left[\frac{M_1}{(M+M_1)M}\,l^3 + \frac{M_2}{(M+M_1+M_2)(M+M_1)}\,(l+l_1)^3 + \right.$$

$$+ \text{etc.} + \frac{M_{n-1}}{(M+M_1+\text{etc.}+M_{n-1})(M+M+\text{etc.}+M_{n-2})}\,(l+l_1+$$

$$\left. + \text{etc.} + l_{n-2})\right].$$

Dans cette formule,

i est la perte de flèche sous la charge que l'on considère, Q, L et l sont connus;

M, M_1, M_2, et M_{n-1} sont les moments d'élasticité des feuilles; ces moments sont différents, puisque les épaisseurs des feuilles varient. M est le moment de la première feuille, M_1 celui de la seconde, etc., et M_{n-1} celui de la dernière feuille. Si par exemple un ressort est composé de 8 feuilles, $n-1$ sera égal à $8-1=7$. Le moment de la huitième feuille sera donc exprimé par M_7.

Il est facile de voir que cette formule est composée de deux parties, et, chose à remarquer, la première donne la flexion du ressort que l'on considère, toutes les feuilles étant supposées de la même longueur, c'est-à-dire sans être étagées; la deuxième partie, au contraire, donne la flexion due exclusivement aux étagements des feuilles. Ces deux quantités réunies donnent la flexion du ressort étagé.

Cette formule est beaucoup moins longue à calculer qu'elle ne paraît. En effet, on remarque que les termes $\frac{M_1}{(M+M_1)M}$, etc., sont communs dans les deux parties de la formule générale, et par conséquent qu'il n'y a besoin d'en chercher la valeur qu'une seule fois.

Qu'entre deux termes il y a toujours un des facteurs qui se répète, et qu'enfin les sommes $M+M_1+$ etc., sont très-faciles à obtenir, en ajoutant successivement et au fur et à mesure du calcul, le moment d'une feuille à la somme des moments précédents.

Cette formule se simplifie encore quand toutes les feuilles ne varient pas d'épaisseurs, alors il y a un certain nombre de moments égaux.

Un exemple de ce calcul fera mieux comprendre toutes ces simplifications.

Calcul de la flexion du ressort à feuilles d'épaisseurs décroissantes (*fig.* 2).

Ce ressort est composé de trois feuilles de $0^m,010$, trois feuilles de $0^m,009$ et quatre feuilles de $0^m,008$. Si toutes les feuilles étaient inégales, les moments d'élasticité seraient désignés par

$$\overbrace{M\ M_1\ M_2}^{M} \quad \overbrace{M_3\ M_4\ M_5}^{M_3} \quad \overbrace{M_6\ M_7\ M_8\ M_9}^{M_6}$$

Dans le cas présent, nous n'avons que trois moments différents, que l'on pourrait désigner par $M\,M_1\,M_2$, mais qu'il vaut mieux désigner par $M_0\,M_3\,M_6$, parce que les indices 3 et 6 servent de repère pour savoir à quelle feuille l'épaisseur change. Pour le ressort qui nous occupe, la formule (IV) deviendra donc :

$$f = \frac{QL^3}{3}\left[\frac{1}{M} - \overset{(1)}{\frac{M}{2M\times M}} - \overset{(2)}{\frac{M}{3M\times 2M}} - \overset{(3)}{\frac{M_3}{(3M+M_3)3M}} + \right.$$

$$\left. - \overset{(4)}{\frac{M_3}{(3M+2M_3)(3M+M_3)}} - \overset{(5)}{\frac{M_3}{(3M+3M_3)(3M+2M_3)}} - \right.$$

$$-\frac{M_6^{(6)}}{(3M+3M_1+M_2)(3M+3M_3)}-$$

$$-\frac{M_6^{(7)}}{(3M+3M_1+2M_6)(3M+3M_3+M_4)}-$$

$$-\frac{M_6^{(8)}}{(3M+3M_1+3M_5)(3M+3M_3+M_4)}-$$

$$-\frac{M_6^{(9)}}{(3M+3M_1+4M_6)(3M+3M_3+3M_5)}+\frac{Q}{3}\left[\frac{M^{(1)}}{2M\times M}l^3+\right.$$

$$+\frac{M^{(2)}}{3M\times 2M}\times(2l)^3+\frac{M_3^{(3)}}{(3M+M_3)3M}\times(3l)^3+$$

$$+\frac{M_3^{(4)}}{(3M+2M_3)(3M+M_3)}\times(3l+l_3)^3+$$

$$+\frac{M_3^{(5)}}{(3M+3M_3)(3M+2M_3)}\times(3l+2l_3)^3+$$

$$+\frac{M_6^{(6)}}{(3M+3M_1+M_2)(3M+3M_3)}\times(3l+3l_3)^3+$$

$$+\frac{M_6^{(7)}}{(3M+3M_1+2M_6)(3M+3M_3+M_4)}\times(3l+3l_3+l_6)^3+$$

$$+\frac{M_6^{(8)}}{(3M+3M_1+3M_5)(3M+3M_3+2M_4)}\times(3l+3l_3+2l_6)^3+$$

$$\left.+\frac{M_6^{(9)}}{(3M+3M_1+4M_6)(3M+3M_3+3M_5)}\times(3l+3l_3+3l_6)^3\right].$$

En substituant, dans cette formule, les valeurs numériques, on trouvera, comme flexibilité par 1.000 kilogrammes, ou pour valeur de i, $0^m,024$.

Disposition du calcul.

1re PARTIE.

$$\frac{QL^3}{3} = 16{,}7574$$

$$\frac{1}{M} = 0{,}0080$$

1er terme.	= 0,0040
2e.	= 0,00130
3e.	= 0,0005214
4e.	= 0,0003509
5e.	= 0,0002522
6e.	= 0,0001385
7e.	= 0,0001158
8e.	= 0,00009776
9e.	= 0,0000842
Somme des 9 termes.	= 0,00686076

Valeur de la 1re partie :

$$16{,}7574 \times (0{,}008 - 0{,}0068607) = 0{,}0190950.$$

2e PARTIE.

$$\frac{Q}{3} = 166{,}66.$$

1er terme.	= 0,000000664
2e.	= 0,000000430
3e.	= 0,000000259
4e.	= 0,000003200
5e.	= 0,000003750
6e.	= 0,000003780
7e.	= 0,000004170
8e.	= 0,000004850
9e.	= 0,000005400
Somme des 9 termes.	= 0,000026503

Valeur de la 2e partie :

$$= 166{,}66 \times 0{,}0000265 = 0{,}00442;$$

d'où

$$i = 0{,}0190950 + 0{,}00442 = 0{,}0235.$$

D'après cet exemple, qui me paraît suffisant, on

pourra trouver la flexibilité d'un ressort quelconque compris dans la catégorie des types n° 2, n° 3 et n° 4.

2° L'allongement en un point quelconque de la maîtresse-feuille et sous une charge quelconque, est donné par l'expression générale

$$\alpha = \frac{e}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho}\right).$$

La valeur de ρ, pour les ressorts à feuilles d'inégale épaisseur, est

$$(V) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{\frac{M}{r} + \frac{M_1}{r_1} + \frac{M_2}{r_2} + \text{etc.} + \frac{M_{n-1}}{r_{n-1}} - Q(L - \lambda)}{M + M_1 + M_2 + \text{etc.} + M_{n-1}}$$

Dans cette formule $r\, r_1\, r_2$ etc. sont les rayons de fabrication des feuilles, qui varient, comme on l'a vu, avec les épaisseurs des feuilles.

Dans les ressorts à feuilles d'égale épaisseur, nous avons vu que l'allongement en un point quelconque était indépendant du rayon de courbure et ne dépendait que de la charge Q ; il n'en est plus ainsi quand les feuilles ont des épaisseurs différentes, parce que les rayons varient pour chaque feuille. Il est donc nécessaire de connaître ces rayons. On peut les obtenir en démontant le ressort et en prenant directement le rayon de chaque feuille, ou bien, ce qui est plus simple et assez exact, par la relation

$$r = \frac{L^2}{2f}$$

c'est-à-dire en prenant la longueur des feuilles et leur flèche.

Si donc, pour le ressort (*fig.* 3), on veut connaître l'allongement au milieu de la maîtresse feuille sous la charge de 2.000 kil. = 2Q, on cherchera d'abord le

rayon de fabrication r de la première feuille, qui est le même pour les trois premières $= 2^m,273$; r_3 le rayon du second groupe de feuilles d'égale épaisseur $= 2^m,045$, et enfin le rayon r_6 du dernier groupe $= 1^m,820$. En substituant dans la formule (V) ces valeurs de r, r_3, r_6, en remarquant que $\lambda = 0$, qu'il a été supprimé une feuille par l'effet de la bride et qu'il faut par conséquent supposer cinq feuilles de $0^m,008$ au lieu de quatre, on aura pour valeur de $\frac{1}{\rho}$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{3\times125}{2,273} + \frac{3\times91.125}{2,045} + \frac{5\times64}{1,820} - 1000\times0,465}{3\times125 + 3\times91,125 + 5\times64} = \frac{9.48}{968,37}$$

Et en remplaçant dans la formule (II) $\frac{1}{\rho}$ par sa valeur, on aura :

$$\alpha = \frac{0,01}{2}\left(\frac{1}{2,273} - \frac{9,48}{968,37}\right)$$

ou

$$\alpha = \frac{0,01}{2}\left[\frac{968,37 - (2,273\times9.48)}{2,273\times968,37} = 0,0021998\right]$$

ou très-approximativement $0,0022$, qui est l'allongement demandé.

On peut remarquer que ce ressort s'aplatissant sous une charge de $2,000$ kilogrammes, il s'ensuit, la flexion étant proportionnelle à la charge, qu'il pourra se courber en sens inverse ou prendre une flèche négative.

5e *type.* Ressorts à auxiliaire.

Je vais considérer d'abord le cas le plus fréquent, c'est-à-dire quand le ressort proprement dit est formé de feuilles d'égale épaisseur.

1° La flexion de la première partie du ressort est donnée par la formule

$$i = \frac{Q}{6nM}\left[2L^3 + (nl)^3\right].$$

n est le nombre de feuilles du ressort proprement dit. Q est toujours la moitié de la charge sous laquelle on cherche la flexion du ressort.

Afin d'obtenir directement la flexion par 1.000 kilogrammes, j'ai toujours supposé $2Q = 1.000$ kilogrammes, ce qui en effet peut toujours se faire pour les ressorts ordinaires. Mais il est évident que si la charge normale du ressort à auxiliaire que l'on considère était moindre que 1.000 kilogrammes, il ne serait plus exact de chercher la flexion sous ce poids, puisque au delà de la charge normale la flexibilité va en diminuant. Pour ces ressorts, $2Q$ doit donc être au maximum égal à la charge normale. Donc la première chose à chercher est cette charge normale, ou, ce qui revient au même, à partir de quel poids le ressort proprement dit commence à être en contact, au delà du centre, avec l'auxiliaire. Pour que le contact du ressort proprement dit avec l'auxiliaire ne commence qu'à partir de la charge normale, il faut évidemment que le rayon de fabrication de cet auxiliaire soit égal au rayon qui a lieu au milieu du ressort sous cette même charge, rayon désigné, comme on le sait, par ρ et dont la valeur pour les ressorts à feuilles d'égale épaisseur est

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{nM}{r} - Q(L - \lambda)}{nM},$$

d'où l'on tire, en remarquant que $\lambda = 0$,

$$Q = \frac{nM(\rho - r)}{rL\rho}.$$

Si j'appelle R′ le rayon de fabrication de l'auxiliaire, alors, suivant ce qui a été dit plus haut,

$$R' = \rho.$$

Il est toujours facile d'avoir R', soit, comme je l'ai dit, au moyen de la relation

$$R' = \frac{L'^2}{2f},$$

L' étant la demi-longueur de l'auxiliaire et f sa flèche; ou bien en prenant ce rayon directement; par conséquent Q ou la moitié de la charge normale sera déterminé.

Si j'applique cette formule avec les valeurs numériques relatives au ressort (*fig.* 5), on aura :

$$Q = \frac{6 \times 166{,}375(11{,}68 - 1{,}571)}{1{,}571 \times 0{,}50 \times 11{,}68} = 1.100 \text{ kil.}$$

ou

$$2Q = 2.200 \text{ kil.}$$

Pour ce ressort, on peut donc faire encore $2Q = 1.000$ kilogrammes ou $Q = 500$, et en substituant les valeurs numériques dans la formule (VI), on aura :

$$i = \frac{500}{6 \times 6 \times 166{,}375}\left[2 \times (0.5)^3 + (6 \times 0{,}0605)^3\right] = 0^m{,}025,$$

qui est la flexibilité du ressort proprement dit par 1.000 kilogrammes jusqu'à 2.200.

Il peut être utile quelquefois de connaître la flexibilité que conserve un ressort à auxiliaire sous une certaine charge supérieure à la charge normale. Pour cela, cette charge étant donnée, il faut chercher :

1° Sur quelle longueur l'auxliaire est en contact avec la dernière feuille du ressort proprement dit;

2° Considérer la partie de l'auxiliaire qui n'est pas en contact comme n'existant pas et calculer alors la flexion des feuilles *en contact* absolument comme un ressort à feuilles d'inégale épaisseur.

Par exemple, on veut connaître quelle est la flexibilité du ressort que je viens de considérer sous

2.600 kilogrammes. Je suppose que sous cette charge que j'appelle 2Q' le ressort proprement dit soit en contact avec l'auxiliaire sur une longueur $ab = \lambda$ (*fig.* 5), évidemment alors au point b le rayon de courbure des feuilles de la première partie du ressort, ou ρ, sera égal au rayon de l'auxiliaire R'. Or nous savons déjà qu'au point b la valeur de ρ est

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{nM}{r} - Q'(L - \lambda)}{nM}.$$

On aura donc :

$$\frac{1}{R'} = \frac{\frac{nM}{r} - Q'(L - \lambda)}{nM},$$

d'où l'on tire :

$$\lambda = L + \left(\frac{nM}{R'Q'} - \frac{nM}{Q'r}\right)$$

ou bien

$$L - \lambda = \frac{nM}{Q'r} - \frac{nM}{Q'R'}.$$

équation qui donne la valeur de λ; c'est-à-dire la longueur du contact du ressort proprement dit avec l'auxiliaire. Dans l'exemple qui nous occupe nous aurons donc :

$$\lambda = 0{,}50 + \left(\frac{6 \times 166.375}{11.68 \times 1300} - \frac{6 \times 166.375}{1.571 \times 1300}\right) = 0^{m},077.$$

Pour trouver maintenant la flexibilité du ressort, je regarde λ comme la longueur de la dernière feuille, par conséquent la longueur de l'étagement l_5 sera égale à la demi-longueur de la sixième feuille, que j'appelle L_6, moins λ ou bien $l_5 = L_6 - \lambda$. On aura alors :

$$i = \frac{QL^3}{3}\left[\frac{1}{M} - \frac{M}{2M \times M} - \frac{M}{3M \times 2M} - \frac{M}{4M \times 3M} - \right.$$
$$\left. - \frac{M}{5M \times 4M} - \frac{M}{6M \times 5M} - \frac{M'}{(6M + M') \times 6M}\right] +$$

$$+\frac{Q}{3}\left[\frac{M}{2M\times M}\times l^3+\frac{M}{3M\times 2M}\times(2l)^3+\frac{M}{4M\times 3M}\times(3l)^3+\right.$$
$$+\frac{M}{5M\times 4M}\times(4l)^3+\frac{M}{6M\times 5M}\times(5l)^3+$$
$$\left.+\frac{M'}{(6M+M')\times 6M}\times(5l+l_1)^3.\right.$$

En substituant dans cette formule que l'on connaît déjà les valeurs numériques s'appliquant au ressort pris pour exemple, on aura la flexibilité demandée.

Il n'y a aucun avantage à composer la première partie des ressorts à auxiliaire de feuilles d'inégale épaisseur. Par conséquent il est plus simple, surtout au point de vue de la fabrication, de les faire en feuilles de la même épaisseur.

2° L'allongement en un point quelconque du ressort proprement dit se détermine absolument comme pour les ressorts ordinaires, c'est-à-dire par la formule

$$\alpha=\frac{\varphi}{2}\times\frac{Q(L-\lambda)}{nM},$$

et au milieu du ressort par la formule

$$z=\frac{eQL}{2nM}.$$

Il est évident que dans tous les cas la valeur de Q doit être égale au plus à la moitié de la charge normale.

Quant à l'auxiliaire, il n'y a d'intérêt à connaître que son allongement maximum. Or, comme le plus grand allongement correspond toujours pour les ressorts à auxiliaire à l'aplatissement du ressort, il s'ensuit que l'allongement de l'auxiliaire sera donné par la formule

$$e'=\frac{e'}{2R'}.$$

Pour le ressort que nous venons d'analyser, cet allongement sera :

$$\alpha' = \frac{0^m,023}{2 \times 11.68} = 0,00098.$$

Ressorts de traction.

L'analyse d'un ressort de traction, quel qu'en soit le type, se fait d'après les mêmes règles que pour les ressorts de suspension.

Ressorts de choc.

Dans les ressorts de choc la flexion et l'allongement sous une charge déterminée se calculent absolument comme pour les ressorts de suspension et de traction, mais il est une autre condition à rechercher, c'est le choc que ces ressorts sont susceptibles d'amortir ou, en d'autres termes, la quantité de travail qu'ils peuvent absorber; cette quantité de travail T est donnée par la relation

$$T = \frac{EV\alpha^2}{6};$$

Dans cette formule E est le coefficient d'élasticité de l'acier que nous avons pris égal à 20 000 000 000 ; V le volume du ressort en fractions du mètre, volume qu'il est toujours facile de déterminer, et α l'allongement qu'éprouvent les feuilles du ressort quand il est aplati.

Ainsi, si nous considérons le ressort (*fig.* 9) dont le volume V est $0^m,01077$ et dont l'allongement correspondant à l'aplatissement est 0,004, on aura :

$$T = \frac{20\,000\,000\,000 \times 0,01077 \times (0,004)^2}{6} = 574 \text{ kilogrammètres.}$$

Pour le ressort (*fig.* 10) on aura :

$$T = \frac{20\,000\,000\,000 \times 0,0033 \times (0,004)^2}{6} = 179 \text{ kilogrammètres.}$$

Quand on aura un ressort de choc à examiner, il faut donc commencer par bien se rendre compte du travail déterminé par les chocs qui pourront se produire.

CHAPITRE III.

Construction ou calcul des ressorts.

Pour déterminer un ressort, il faut connaître d'abord les conditions auxquelles il doit satisfaire, c'est-à-dire qu'il faut se donner :

1° La flexibilité qui est variable suivant les cas. Ainsi, les ressorts de suspension de locomotives sont très-peu flexibles, les ressorts de wagons le sont plus, ceux des voitures à voyageurs encore davantage, etc.;

2° La charge normale que doit porter le ressort, charge qui est toujours déterminée, puisqu'elle se compose, pour les ressorts de suspension, du poids du véhicule qui porte sur les ressorts et du poids maximum en marchandises ou en voyageurs dont le wagon ou la voiture peuvent être chargés, et pour les ressorts de traction du poids total à traîner, en tenant compte de la vitesse des convois, des pentes du chemin, etc... Pour les ressorts de choc, il n'y a pas de charge normale, ce qui est déterminé à l'avance c'est comme on l'a vu le plus grand choc que le ressort doit pouvoir amortir, et par conséquent le volume total du ressort.

3° On se donne aussi évidemment l'allongement correspondant à la charge normale, allongement qui est, on le sait, plus ou moins fort, suivant que sous la même charge on veut faire travailler plus ou moins l'acier. On se donne encore soit la longueur du ressort ou de la première feuille soit la corde de fabrication ou la

corde sous charge. Ces dernières parties sont toujours déterminées par la disposition des points d'attache des ressorts au véhicule. Enfin, la largeur des feuilles d'acier qui n'entre du reste dans les formules que pour déterminer le moment d'élasticité.

Ainsi pour établir un ressort, on doit se donner forcément :

1° La largeur des feuilles $= a$;

2° La flexibilité ou flexion par 1.000 kil. $= i$;

3° La charge normale $= 2Q$;

4° L'allongement correspondant à la charge normale ;

5° La longueur de la première feuille comptée à partir des points de contact ou d'appui $= 2L$;

Ou la corde de fabrication $= 2c$.

Ou la corde sous charge $= 2c'$.

Cela posé, nous allons calculer une série de ressorts correspondants aux différents types décrits et analysés précédemment.

1er *type.* Ressort à feuilles d'égale épaisseur.

Soit à déterminer les dimensions d'un ressort de suspension de wagon-ballast à feuilles d'égale épaisseur dans les conditions suivantes :

Largeur des feuilles.	$0^m,075$	
Longueur développée de la première feuille entre les points de contact.	$1^m,00$	$= 2L$
Flexibilité par 1.000 kil.	$0^m,0275$	$= i$
Charge normale.	2.000	$= 2Q$
Allongement correspondant.	0,0022	$= \alpha$

Et supposons que l'aplatissement du ressort ait lieu sous la charge correspondant à un allongement de 0,005 ; d'après ce qui a été dit dans les préliminaires, les charges étant proportionnelles aux allongements, cette charge d'aplatissement sera donnée par la proportion :

$$2.000 \text{ kil.} : 0{,}0022 :: x : 0{,}005,$$

d'où

$$x = \frac{1000 \times 0.005}{0,0022} = 4.500 \text{ kil. environ} = 2P.$$

Détermination de la flèche de fabrication.

La flexibilité étant proportionnelle à la charge, la flèche du ressort sera donnée par la proportion :

$$1.000 \text{ kil.} : 0,0275 :: 4500 : f,$$

d'où

$$f = \frac{0,0275 \times 4.500}{1000} = 0,124.$$

Rayon des feuilles.

Nous connaissons déjà la relation

$$L^2 = 2rf,$$

d'où

$$r = \frac{L^2}{2f} = \frac{(0.5)^2}{2 \times 124} = 1^m,008.$$

Épaisseur des feuilles.

L'épaisseur des feuilles se détermine par la relation déjà connue

$$e = 2f\alpha.$$

En remarquant que α est toujours l'allongement correspondant à l'aplatissement du ressort, on aura

$$e = 2 \times 1.008 \times 0,005 = 0^m,01008.$$

En général, à moins qu'il ne s'agisse d'instrument de précision, la flexibilité d'un ressort peut toujours varier sans inconvénient de $0^m,001$ ou $0^m,002$ ou même de $0^m,003$ par 1.000 kilogrammes; par conséquent, comme mesure pratique et pour faciliter la fabrication, il est préférable de ne faire varier les épaisseurs des feuilles que de millimètre en millimètre sans aucune fraction, c'est ce qu'il est du reste, et comme on va le voir, toujours facile de faire.

Nous avons trouvé comme épaisseur des feuilles $e = 0,01008$; l'épaisseur en millimètres sans fraction qui se rapproche le plus de ce chiffre est $0^m,01$, qu'on

prend alors comme épaisseur et de laquelle on déduit ensuite le rayon, puisqu'on a :

$$r = \frac{e}{2\alpha} = \frac{0.01}{2 \times 0.005} = 1^{m},00,$$

d'où on a pour valeur de la flèche

$$f = \frac{L^2}{2r} = 0,125.$$

On a donc :

$$f = 0^{m},125$$
$$r = 1^{m},000$$
$$e = 0^{m},010$$

L'étagement se détermine par la formule

Détermination de l'étagement.

$$l = \frac{M}{Pr}.$$

On trouve la valeur de M pour des feuilles de $0^{m},010$ dans le tableau donné dans les préliminaires, et j'ai donné du reste la manière d'en trouver la valeur dans tous les cas, on aura donc :

$$l = \frac{125}{2250 \times 1} = 0^{m},0555.$$

Connaissant l'étagement qui est le même pour toutes les feuilles, le nombre des feuilles sera égal à la demi-longueur de la maîtresse-feuille divisée par cet étagement ou

$$n = \frac{L}{l} = \frac{0.50}{0,0555} = 9.009 \quad \text{ou} \quad 9 \text{ feuilles.}$$

Remarque.

On fixe ordinairement les ressorts par leur milieu au moyen de brides affectant différentes formes. On comprend dès lors que toutes les feuilles qui n'auraient pas une longueur plus grande que cette bride ne seraient d'aucun effet et par conséquent qu'elles peuvent être supprimées, c'est ce qu'il faut toujours faire,

puisqu'on diminuera de cette manière le poids du ressort.

Le ressort que nous considérons est pris par son milieu sur une longueur totale de $0^m,120$, dont la moitié est de $0^m,06 = d$.

Si on mettait neuf feuilles, la longueur de la dernière feuille serait plus faible que la largeur de la bride. On peut donc ne mettre que huit feuilles et alors la demi-longueur de la huitième ou dernière feuille sera

$$L_7 = 0{,}500 - (7 \times 0{,}0555) = 0{,}111.$$

Détermination de la longueur des feuilles.

Pour obtenir la demi-longueur de toutes les feuilles du ressort, il faut retrancher successivement l'étagement de la dernière longueur obtenue, nous aurons ainsi :

$$L = 0{,}500 = 1^{re}\text{ feuille.}$$
$$L_1 = 0{,}500 - 0{,}0555 = 0{,}4445 = 2^e$$
$$L_2 = 0{,}4445 - 0{,}0555 = 0{,}3890 = 3^e$$
$$L_3 = 0{,}3890 - 0{,}0555 = 0{,}3335 = 4^e$$
$$L_4 = 0{,}3335 - 0{,}0555 = 0{,}2780 = 5^e$$
$$L_5 = 0{,}2780 - 0{,}0555 = 0{,}225 = 6^e$$
$$L_6 = 0{,}2225 - 0{,}0555 = 0{,}1670 = 7^e$$
$$L_7 = 0{,}1670 - 0{,}0555 = 0{,}1115 = 8^e$$

Amincissement de l'étagement.

Les feuilles de ressorts doivent être amincies à leurs extrémités sur une longueur correspondant à celle de l'étagement.

Voici comment on détermine ces amincissements :

Soit l (*fig.* 11) la longueur de l'étagement ab et e l'épaisseur de la feuille ; l'épaisseur e_1, au point c, sera donnée par la proportion

$$e^3 : e_1^3 :: l : l_1, \quad \text{d'où} : e_1 = e\sqrt[3]{\frac{l_1}{l}},$$

et

$$e_2 = e\sqrt[3]{\frac{l_2}{l}}, \text{ etc.}$$

On se donne à volonté les points c, d, etc. ; on a donc autant de points qu'on veut des épaisseurs correspondantes.

Le calcul démontre que le volume de la partie enlevée par cette manière d'amincir les feuilles est le quart du volume total correspondant aux étagements.

Pour tous les ressorts que j'ai calculés jusqu'ici, j'ai divisé l'étagement, à moins que sa longueur ne dépassât $0^m,200$ en cinq parties égales, que j'ai désignées par 3/4, 1/2, 1/4, 1/8, parce que ac, ad, etc., sont les 3/4, les 1/2, etc. de l. Or les fractions 3/4, 1/2, 1/4, 1/8,..... ne sont autre chose que les rapports $\frac{l_1}{l}$, $\frac{l_2}{l}$, etc. J'ai donc déterminé une fois pour toutes la valeur de la racine cubique de ces rapports ou des expressions numériques :

$$\sqrt[3]{\frac{3}{4}} = 0{,}91 ;$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 0{,}79 ;$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{4}} = 0{,}63 ;$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = 0{,}5 .$$

Et alors, pour avoir les épaisseurs e_1, e_2, etc., il n'y a plus qu'à multiplier l'épaisseur totale de la feuille par les résultats ci-dessus.

Appliquons cette méthode à notre exemple, nous aurons

$$e_1 = 10^{mm} \times 0{,}91 = 9^{mm} \text{ environ.}$$
$$e_2 = 10 \times 0{,}79 = 8$$
$$e_3 = 10 \times 0{,}63 = 6$$
$$e_4 = 10 \times 0{,}50 = 5$$

Détermination du poids ou volume du ressort.

Il ne nous reste plus maintenant qu'à chercher le poids du ressort que nous venons de déterminer. Voici une méthode très-simple, et pour simplifier encore, on prend le décimètre pour unité.

Faire la somme des demi-longueurs de la première et de la dernière feuille :

$$5{,}00 + 1{,}11 = 6{,}11.$$

Multiplier cette somme par le nombre de feuilles $6{,}11 \times 8 = 48^{dm},88$, on a la longueur développée de toutes les feuilles.

Multiplier ce dernier résultat par l'épaisseur des feuilles

$$48^{d},88 \times 0^{d},1 = 4^{dq},88,$$

on a la surface du ressort en décimètres quarrés, les feuilles supposées non amincies. D'après ce qui a été dit, il faut retrancher de cette valeur la surface due aux amincissements, opération qu'on fait à part.

Pour cela, multiplier le double de la longueur de l'étagement par le nombre de feuilles

$$1^{d},11 \times 8 = 8^{d},88.$$

Multiplier cette somme par l'épaisseur des feuilles :

$$8^{d},88 \times 0^{d},1;$$

prendre le quart de ce produit

$$\frac{0^{dq},888}{4} = 0^{dq},222,$$

et on a la surface, dans le sens de l'épaisseur de la feuille de l'acier enlevée par les amincissements. On retranche ensuite ce résultat de la surface obtenue du ressort,

$$4^{dq},88 - 0^{dq},222 = 4^{dq},658.$$

et on a la surface réelle du ressort.

Multiplier ce volume par la largeur des feuilles pour avoir le volume du ressort.

$$4^{dq},658 \times 0^{d},75 = 3^{dc},49.$$

Multiplier ce volume par la densité de l'acier, qui est 7,8,

$$3^{dc},49 \times 7,8 = 27^{k},22$$

et on a le poids du ressort.

Remarques.

1° Dans les ressorts à feuilles d'égale épaisseur, on peut modifier la flèche à volonté, de sorte que comme simplification pour les calculs, on peut toujours supposer que le ressort s'aplatisse sous la charge normale $2Q$, qui devient alors la charge d'aplatissement, et dans la relation $e = 2r\alpha$, α correspond à la charge $2Q$.

2° Pour le ressort que j'ai pris pour exemple, j'ai supposé que la longueur développée de la première feuille était donnée, et au moyen de la relation $r = \frac{L^2}{2f}$, nous avons déterminé le rayon. Si au lieu de donner $2L$ on donnait la corde de fabrication $2c$, on déterminerait le rayon par la relation

$$r = \frac{f^2 + c^2}{2f},$$

de laquelle on tire :

$$f = r - \sqrt{r^2 - c^2}.$$

Si on donnait la corde sous la charge normale, et qu'on désignât par i la perte de flèche correspondante à cette charge, on aurait alors

$$r = \frac{(f-i)^2 + c^2}{2f},$$

d'où l'on tirerait, pour valeur de f,

$$f = r + i - \sqrt{r^2 + 2ri - c^2}.$$

Dans tous les cas, on pourra donc déterminer un ressort à feuilles d'égale épaisseur.

Légende du ressort à pincettes (fig. 2).

Données.

Largeur des feuilles.	$0^m,05$
Long. développée de la 1re feuille.	$0^m,960$
Charge normale.	130 kil.
Allongement correspondant. . .	$0^m,002$
Flexibilité par 100 kil.	$0^m,030$ à $0,035$

Résultats.

$f = 0,084$	Poids du ressort ou de la feuille.	$2^k,80$
$e = 0,010$		
$r = 1,25$		
$l = 0^m,510$		
$n = 1$		
Flexion par 100 kil.		0,032

2e type. **Ressorts à feuilles sensiblement de même épaisseur.**

Le calcul des ressorts à feuilles sensiblement de même épaisseur se fait d'une manière analogue.

La flèche et le rayon de la première ou maîtresse feuille se déterminent absolument comme nous l'avons fait.

Soient donc r le rayon de la première feuille, et e son épaisseur, puisque dans ces ressorts toutes les feuilles sont juxtaposées, c'est-à-dire, puisque les rayons croissent à chaque fois de l'épaisseur de la feuille précédente, le rayon de la deuxième feuille sera

$$r + e = r_1,$$

d'où, au moyen de la relation $e_1 = 2r_1\alpha$, on déterminera e_1 ou l'épaisseur de la seconde feuille.

Le rayon de la troisième feuille sera

$$r_1 + e_1 = r_2,$$

d'où

$$e_2 = 2r_2\alpha$$

et ainsi de suite.

Les étagements correspondants aux épaisseurs e, e_1, e_2, etc., seront donnés par

$$l = \frac{M}{Pr};$$

$$l_1 = \frac{M_1}{Pr_1};$$

$$l_2 = \frac{M_2}{Pr_2}, \text{ etc.}$$

Le nombre des feuilles et la longueur de chacune d'elles, seront déterminées en retranchant successivement de la première feuille le double des divers étagements l, l_1, l_2, etc., jusqu'à ce qu'on arrive à une longueur égale au minimum à la longueur de la bride du collier, et au maximum à cette longueur de bride, plus le double du dernier étagement.

Connaissant les épaisseurs des feuilles, leurs rayons, leurs épaisseurs et le nombre de ces feuilles, le ressort sera déterminé.

Seulement, puisque les feuilles ne sont plus d'égale épaisseur, on ne pourra pas en déterminer le poids d'après la méthode précédente, il faudra évidemment faire la surface de chaque feuille, dans le sens de son épaisseur, pour avoir la surface totale du ressort; ceci fait, on continuera comme il a été dit précédemment.

3e *type*. Ressort à feuilles d'épaisseurs décroissantes (*fig.* 3).

Soit à déterminer les différentes dimensions d'un ressort de ce type, dont les données sont les suivantes :

Largeur des feuilles.	$0^m,075$
Longueur de la 1re feuille entre les points de contact (a, b) où se produit l'effort.	$0^m,930 = 2L$
Flexibilité par 1.000 kil.	$0^m,025 = i$
Charge normale correspondant à l'aplatissement du ressort.	2.000 kil.
Allongement correspondant.	0,0022

J'ai remarqué, dans le chapitre premier, que les ressorts à feuilles d'inégale épaisseur ayant la même ré-

sistance que les ressorts à feuilles toutes de même épaisseur et ayant aussi le même volume, avaient nécessairement la même flexibilité; il faut donc commencer par déterminer un ressort à feuille de même épaisseur répondant aux conditions données.

Ce ressort, en appliquant les formules données, sera composé de la manière suivante :

$f = 0{,}052$ — Flexibilité par 1.000 kil. . . . . $= 0^{m},026$

$r = 2{,}045$, $e = 0{,}009$, $l = 0{,}0446$ — Volume du ressort. . . . . $= 3^{dc},45$

$n = 10$ — Poids du ressort. . . . . $= 26^{k},90$

Le problème se pose maintenant ainsi :

Faire un ressort à feuilles d'épaisseurs décroissantes dont la longueur de la première feuille est donnée, ainsi que l'allongement correspondant à l'aplatissement (et la charge d'aplatissement qui est la charge normale), et dont le volume soit sensiblement égal à $3^{dq},45$ ou la surface $= \frac{3{,}45}{0{,}75} = 4^{dq},60$.

On comprend de suite que la solution de ce problème ne peut se trouver que par un peu de tâtonnement; cependant, en procédant suivant une certaine méthode, ces tâtonnements se réduisent à fort peu de chose.

Première condition : Si ε désigne l'épaisseur des feuilles du ressort type à feuilles d'égale épaisseur, et e l'épaisseur de la première feuille du ressort à feuilles d'épaisseurs décroissantes, on devra avoir

$$e > \varepsilon.$$

Nous avons trouvé $\varepsilon = 0^{m},009$, faisons $e = 0^{m},010$, et mettons trois feuilles, par exemple, de cette épaisseur; pour ces trois feuilles nous aurons :

$e = 0{,}010$

$r = 2{,}273 = \dfrac{e}{2\alpha}$

$l = 0{,}055 = \dfrac{M}{Qr}$

$n = 3$

Longueurs développées de ces feuilles.

1re feuille. . . . 0,930

2e. 0,820

3e. 0,710

Surface en décimèt. quarrés. 2,46

Supposons maintenant trois autres feuilles d'une épaisseur moindre, par exemple de 0,009. On aura alors :

$e_1 = 0{,}009$

$r_1 = 2{,}045$

$l_1 = 0{,}0446$

$n_1 = 3$

Longueurs développées de ces feuilles.

4e feuille. 0,600

5e. 0,511

6e. 0,422

Surf. en déc. quarrés. . . 1,53

Cherchons la surface de ces deux premières parties d'après la méthode déjà donnée, mais sans tenir compte, pour simplifier, des amincissements, on trouvera pour la première partie $s = 2{,}46$, et pour la deuxième partie $s_1 = 1{,}53$. Si on retranche la somme de ces deux surfaces de la surface totale du ressort, on aura la surface s_2, qu'il reste à compléter :

$$s_2 = 4^d{,}60 - (2{,}46 + 1{,}53) = 0^{dc}{,}61.$$

Quels sont l'épaisseur et le nombre de feuilles qui donneront cette surface? D'abord la longueur de la septième feuille sera évidemment $0{,}422 - 0{,}0892$, le double de l'étagement, ou 0,332.

Si le trapèze ABDF (*fig.* 12) représente approximativement la demi-surface de la partie du ressort que nous venons de déterminer, le triangle CDF représentera approximativement la demi-surface de la partie du ressort qui reste à trouver; or connaissant $DF = \lambda$, ou la demi-longueur de la septième feuille, et la surface $\frac{s_2}{2}$

du triangle CDF, la hauteur DC=h sera déterminée, puisqu'on a:

$$\lambda \times \frac{h}{2} = \frac{s_2}{2},$$

d'où

$$h = \frac{s_2}{\lambda} = \frac{0{,}61}{1{,}66} = 0{,}367.$$

Si e exprime l'épaisseur d'une feuille quelconque déjà déterminée, par exemple de la première feuille, l l'étagement correspondant à cette épaisseur, on démontre qu'on a:

$$\frac{e}{l} : \frac{h}{\lambda} :: e_2 : e,$$

e_2 désignant l'épaisseur des feuilles qui restent à déterminer; on aura donc:

$$e_2 = \frac{e^3 \times \lambda}{l \times h} = \frac{(0{,}10)^3 \times 1{,}66}{0{,}55 \times 0{,}367} = 0^d{,}084,$$

et en fonction du mètre $0^m{,}0084$, ou environ, pour prendre une épaisseur exacte en millimètres, $0^m{,}008$.

Connaissant e_2, on en déduira:

Le rayon r_2. . . . . $= \frac{e_2}{2\alpha} = 1^m{,}82.$

Le moment d'élasticité $M_2 = 64.$

L'étagement l_2. . . . . $= \frac{M_2}{Qr_2} = 0^m{,}035.$

Le nombre des feuilles $n_2 = \frac{\lambda}{l_2} = \frac{0{,}166}{0{,}035} = 4.$

et la longueur des feuilles en retranchant successivement l'étagement.

On aura donc pour cette troisième partie du ressort:

$e_2 = 0{,}008$
$r_2 = 1{,}820$
$l_2 = 0{,}035$
$n_2 = 4$

7^e feuille. . . . . $= 0{,}332$
8^e. . . . . $= 0{,}262$
9^e. . . . . $= 0{,}192$
10^e. . . . . $= 0{,}122$

$s_2 = 0^{dc}{,}726.$

La surface de cette troisième partie, en ne tenant pas compte des amincissements, sera

$$0^{dc},7264 = s_2.$$

Si cette surface était trop différente de celle que l'on cherche, on modifierait un peu l'épaisseur qu'on vient de trouver; mais pour le cas qui nous occupe, l'approximation est suffisante. La surface totale du ressort sera donc

$$S = s + s_1 + s_2 = 2,46 + 1,53 + 0,7264 = 4,71,$$

et en tenant compte des amincissements,

$$S = 4^{dc},39,$$

ou sensiblement égale à la surface du ressort proprement dit, qui est de $4^{dq},60$.

Le ressort étant ainsi déterminé, on peut vérifier au moyen de la formule (IV) qu'il a la flexibilité voulue. Nous avons trouvé au chapitre II, en faisant l'analyse de ce ressort, que sa flexibilité était de $0^{m},024$ par 1.000 kilogrammes, approximation suffisante, puisque nous nous étions donné pour flexibilité $0^{m},025$ par 1.000 kilogrammes.

De cette manière de procéder pour déterminer les ressorts à feuilles d'épaisseurs décroissantes, il résulte évidemment qu'on peut faire un grand nombre de ressorts répondant très-approximativement aux mêmes conditions de flexibilité et de résistance tout en étant composés d'une manière différente. Ainsi pour le ressort que nous venons de calculer, on aurait pu ne mettre, par exemple, que deux feuilles de $0^{m},010$ au lieu de trois; quatre feuilles de $0^{m},008$ au lieu de trois feuilles de $0^{m},009$, et alors le reste du ressort n'eût pas été composé de la même manière; ou bien encore mettre quatre feuilles de $0^{m},011$ et chercher par la

méthode donnée le complément du volume du ressort, et ainsi de suite.

4e *type*. Ressort à feuilles d'épaisseurs croissantes (*fig.* 4).

Les ressorts à feuilles d'épaisseurs croissantes se calculent identiquement comme les ressorts du type précédent, c'est-à-dire qu'on détermine d'abord le ressort type à feuilles d'égale épaisseur répondant aux conditions données, et qu'on forme ensuite, d'après les règles données, un ressort de même volume, mais dont les feuilles vont en croissant d'une manière quelconque.

Seulement si ε désigne l'épaisseur de la première feuille du ressort à feuille d'égale épaisseur et e l'épaisseur de la première feuille du ressort à feuilles d'épaisseurs croissantes, on devra avoir

$$e < \varepsilon.$$

Nous avons vu au contraire que, pour les ressorts à feuilles d'épaisseurs décroissantes, on devait avoir $e > \varepsilon$. Hors ce cas, je le répète, les calculs pour déterminer ces deux types de ressorts sont tout à fait les mêmes.

Légende du ressort (fig. 4) *à feuilles d'épaisseurs croissantes répondant sensiblement aux mêmes conditions que le ressort* (fig. 3) *à feuilles d'épaisseurs décroissantes.*

	mèt.
2 feuilles, épaisseur de. . .	0,008
r =	1,820
l =	0,035
3 feuilles, épaisseur de. . .	0,009
r_1 =	2,045
l_1 =	0,0446
4 feuilles, épaisseur de. . .	0,010
r_2 =	2,273
l_2 =	0,055
Flexion par 1.000 kil. . .	0,027
Poids total du ressort. . . .	27 kil.

Soient AF et CD (*fig.* 13) les longueurs des feuilles extrêmes d'un ressort à feuilles d'égale épaisseur; AGC le profil de ce ressort aplati et *e* l'épaisseur des feuilles. On démontre que si on remplit la hauteur DF avec des feuilles plus petites que *e* d'épaisseurs décroissantes à partir de la première feuille et dont les étagements sont déterminés d'après la formule $\frac{M}{Pr}$ (P restant constant dans tous les cas), le profil extérieur du ressort aplati devient *Abc*, c'est-à-dire que le volume du ressort augmente; que l'effet contraire a lieu si on fait le ressort à feuilles d'épaisseurs croissantes à partir de la première, qui est toujours = *e*; dans ce cas, le profil du ressort devient *Ab'c'* et le volume diminue.

Remarques sur les ressorts à feuilles d'épaisseurs croissantes et à feuilles d'épaisseurs décroissantes.

Cette remarque est d'une grande utilité pour le calcul des ressorts à feuilles d'inégale épaisseur, puisqu'elle indique que si on a une surface plus petite que celle du ressort type, il faut diminuer l'épaisseur des feuilles ou augmenter le nombre des feuilles ayant de faibles épaisseurs; que si au contraire on a une surface plus grande, il faut augmenter l'épaisseur des premières feuilles ou diminuer le nombre des feuilles ayant de petites épaisseurs.

Il suit encore de là, chose qui arrive quelquefois, que si l'épaisseur totale du ressort est forcément déterminée à l'avance on peut, le plus souvent, par une série de tâtonnements simplifiés cependant par ces principes, arriver à un ressort ayant avec la flexibilité et la résistance demandées une épaisseur déterminée à l'avance.

5e *type*. Ressort à auxiliaire (*fig.* 5).

Soit à déterminer les dimensions d'un ressort de suspension à auxiliaire répondant aux conditions suivantes :

Charge normale. . . . . 2.200kil. = 2Q
Allongement correspondant pour la partie étagée. . . . . 0,0022 = α'
Flexibilité par 1.000 kil. jusqu'à la charge normale. 0m,025
Longueur de la 1re feuille entre les points de contact. . . . . 1m,00 = 2L
Largeur des feuilles. 0m,075

Ces ressorts sont toujours déterminés de manière à ce que la plus forte charge qu'on suppose que le ressort aura à supporter soit par suite des oscillations ou de toute autre cause corresponde à l'aplatissement.

Voici comment on détermine cette charge. Connaissant la charge normale, qui est, pour notre exemple, de 2.200 kilogrammes; l'allongement sous cette charge de la partie étagée du ressort proprement dit, allongement qu'on peut supposer en général de 0,002 à 0,0025, par exemple, 0,0022, et connaissant enfin l'allongement définitif de 0,0035 à 0,004 lors de l'aplatissement, on posera la proportion d'une part entre la charge normale et la charge correspondant à l'aplatissement, et d'autre part entre les allongements dans les deux cas du milieu du ressort proprement dit. Dans le cas actuel, en désignant par $x = 2P$ la charge d'aplatissement, on aura donc la proportion

$$2200 : 0{,}0022 :: x : 0{,}0035,$$

d'où

$$x = \frac{2200 \times 0{,}0035}{0{,}0022} = 3.500 \text{ kil.} = 2P.$$

La flexibilité du ressort proprement dit devant être de 0m,025 par 1.000 kilogrammes jusqu'à 2.200, la plus petite flèche que le ressort pourra avoir sera donnée par la proportion :

$$1000 : 0{,}025 :: 2200 : f',$$

puisque les diminutions de flèche sont proportionnelles aux charges; on aura donc :

$$f' = \frac{2200 \times 0.025}{1000} = 2{,}20 \times 0{,}025 = 0^{m},055.$$

Si l'on ne donnait que cette flèche au ressort, le contact du ressort proprement dit avec l'auxiliaire aurait lieu trop tôt sur une grande longueur, ce qui ferait varier trop brusquement la flexibilité; il convient donc d'augmenter cette flèche d'une certaine quantité assez faible mais tout à fait volontaire; d'ailleurs comme on le verra, en partant de cette plus petite flèche, on est conduit naturellement à augmenter celle-ci de plus en plus pour avoir des ressorts de plus en plus flexibles.

Ajoutons donc à $0^{m},055$, $0^{m},015$ par exemple nous aurons alors :

$$f = 0^{m},055 + 0^{m},015 = 0^{m},070.$$

Connaissant f on a :

$$r = \frac{L^2}{2f} = \frac{(0,5)^2}{2 + 0,07} = 1^{m},78,$$

d'où

$$e = 2ra = 2 \times 1^{m},78 \times 0,0035 = 0,0124.$$

Prenons pour e le chiffre rond, en millimètres, qui se rapproche le plus de l'épaisseur trouvée, on aura alors :

$$e = 0^{m},012,$$

d'où

$$r = \frac{0,012}{2 \times 0,0035} = 1,71;$$

$$l = \frac{M}{Pr} = \frac{216}{1750 \times 1^{m},71} = 0,072.$$

Quel sera le nombre des feuilles?

Il est évident que plus on mettra de feuilles plus on diminuera la flexibilité; il faut donc en mettre le moins

possible. Voici comment on trouvera de suite ce minimum :

Nous avons déjà vu que la valeur du rayon de courbure ρ au milieu du ressort sous une charge $2Q$ est donnée par la formule :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{nM}{r} - QL}{nM}.$$

Or dans cette formule si QL était plus grand que $\frac{nM}{r}$, la valeur de ρ serait négative, c'est-à-dire que la maîtresse feuille du ressort se recourberait au milieu en sens inverse, ce qu'il ne faut pas, car alors l'allongement qu'elle éprouverait serait trop grand puisque sous l'aplatissement cet allongement est déjà de 0,0035. Il faut donc, pour que cet effet n'ait pas lieu, que l'on ait toujours :

$$\frac{nM}{r} > QL \quad \text{ou au moins égal.}$$

Or M et r sont déterminés, il n'y a que n qui peut changer, on tirera donc de l'inégalité ci-dessus :

$$n > \frac{QLr}{M} \quad \text{ou au moins égal.}$$

Pour notre exemple nous aurons :

$$n > \frac{1100 \times 0{,}5 \times 1{,}71}{216} \quad \text{ou} \quad n > 4{,}35$$

ou égal par conséquent à 5 feuilles.

La première partie du ressort sera donc composée de la manière suivante :

	mèt.
f	= 0,070
e	= 0,012
r	= 1,71
l	= 0,069
n	= 5

Voyons si cette première partie ainsi composée a la flexibilité demandée, appliquons la formule (VI) de la flexion relative aux ressorts à auxiliaire,

$$i = \frac{Q'}{6nM}\,[2L^3 + (nl)^3],$$

en substituant et en faisant $2Q' = 1000$ ou $Q' = 500^{kil}$. pour simplifier, comme nous l'avons dit au chapitre II, on aura :

$$i = \frac{500}{6 \times 5 \times 216}\,[2 \times (0,5)^3 + (5 \times 0,072)^3] = 0^m,0229.$$

La flexibilité avec 5 feuilles de 12 millimètres est donc trop faible puisque la flexibilité devrait être de $0^m,025$ au lieu de $0^m,0229$ par 1.000 kilogrammes; par conséquent il faut diminuer l'épaisseur des feuilles, mais dans quelle proportion?

Quand on arrive à une approximation aussi grande que celle que nous avons obtenue, le plus simple est de diminuer l'épaisseur des feuilles de 1 millimètre et on arrive généralement de suite à la flexibilité voulue. Cependant voici la méthode générale :

Il résulte de la formule précédente de la flexion (*), que la flexion i d'un ressort sous une charge $2Q$ varie très-approximativement en raison inverse du moment d'élasticité des feuilles; dès lors pour obtenir le moment M_1, et partant l'épaisseur des feuilles correspondant à la flexion demandée, il suffit de diminuer le moment M dans le rapport de la flexion trouvée (0,0229) à la flexion demandée (0,025), c'est-à-dire qu'on aura :

$$M_1 = 216 \times \frac{0,0229}{0,025} = 198.$$

(*) Voir le mémoire déjà cité.

Connaissant M, on en déduit e_1 au moyen de la formule que l'on connaît déjà,

$$e_1 = e\sqrt[3]{\frac{M_1}{M}} = 0{,}012\sqrt[3]{\frac{198}{216}} = 0{,}0116.$$

Comme sous le rapport de la commodité de la fabrication des ressorts nous ne prenons que des épaisseurs en nombre rond de millimètres nous faisons donc $e = 11^{mil.}$ d'où l'on déduit :

$$M = 166{,}375;$$
$$r = \frac{e}{2a} = 1{,}57;$$
$$f = \frac{L'}{2r} = 0{,}079;$$
$$l = \frac{M}{Pr} = 0{,}0605.$$

On déterminera encore le plus petit nombre de feuilles du ressort par l'inégalité

$$n > \frac{QLr}{M}, \qquad n > \frac{1100 \times 0{,}5 \times 1{,}57}{166{,}375},$$
$$n > 5{,}19, \qquad n = 6.$$

Tous les éléments de ce nouveau ressort étant déterminés on cherche si la flexibilité est bien celle demandée; dans notre exemple nous aurons :

$$i = \frac{500}{6 \times 6 \times 166{,}375}\left[2 \times (0{,}5)^3 + (6 \times 0{,}0605)^3\right] = 0^m0248$$

ou sensiblement $0^m{,}025$.

La première partie du ressort à auxiliaire pourra donc être composée de 6 feuilles de $0^m{,}011$.

La longueur développée des feuilles, les amincissements et le poids du ressort se déterminent comme pour les ressorts ordinaires.

Les longueurs développées seront :

	mèt.
Long. de la 1re feuille entre les points de contact. .	1,00
Longueur totale de la 1re feuille.	1,025
Id. de la 2e.	0,879
Id. de la 3e.	0,758
Id. de la 4e.	0,637
Id. de la 5e.	0,516
Id. de la 6e.	0.395
Poids du ressort proprement dit.	$26^k,11$

Reste à déterminer l'auxiliaire.

Le contact du ressort proprement dit avec l'auxiliaire ne devant commencer qu'au delà de la charge normale, il s'ensuit évidemment que le rayon de l'auxiliaire devra être égal à celui qui a lieu au milieu du ressort sous cette charge normale 2Q. Or nous savons que ce rayon est donné par la formule

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{nM}{r} - QL}{nM}.$$

Si nous appelons R′ le rayon de l'auxiliaire, nous aurons donc :

$$R' = \frac{nM}{\frac{nM}{r} - QL} = \frac{6 \times 166{,}375}{\frac{6 \times 166{,}375}{1{,}57} - 1100 \times 0{,}5} = 11^m,68.$$

Connaissant R′, le moment d'élasticité de l'auxiliaire est donné par la formule

(VII) $$M' = PR'L'.$$

P est, comme on sait, la moitié de la charge correspondante à l'aplatissement, R′ le rayon de l'auxiliaire, et L′ la demi-longueur de cet auxiliaire.

L′ est évidemment égal à la demi-longueur de la der-

nière feuille du ressort proprement dit, diminuée de son étagement. Pour notre exemple nous aurons :

$$L' = 0^m,50 - (6 \times 0^m,0605) = 0^m,137.$$

Remarque sur la longueur de l'auxiliaire.

Quand un ressort est pris en son milieu par des brides ou un collier, la partie de l'auxiliaire comprise dans ces brides ne peut pas travailler; on peut donc ne considérer la longueur de l'auxiliaire qu'à partir de cette bride.

Si j'appelle $2d$ la longueur de la bride ou collier, d sera la demi-longueur, et l'on aura alors :

$$M' = PR'(L' - d).$$

Si nous supposons $2d = 0,120$, nous aurons :

$$M' = 1750 \times 11,68 \times (0,137 - 0,06) = 1573.$$

Connaissant M', nous aurons, comme toujours, l'épaisseur

$$e' = e\sqrt[3]{\frac{M'}{M}} = 0^m,01\sqrt[3]{\frac{1573}{125}} = 0^m,023.$$

Il faut toutefois s'assurer que l'épaisseur e', qui résulte de cette valeur de M', n'est pas plus grande que celle que l'on tirerait de la relation $e'' = 2R'\alpha$, α étant toujours l'allongement correspondant à l'aplatissement. S'il en était ainsi, il faudrait prendre alors cette dernière épaisseur e'', et l'auxiliaire se composerait d'une ou plusieurs feuilles qui se calculeraient comme celles du ressort proprement dit; mais presque toujours e'' est plus fort que e', et par conséquent le plus souvent l'épaisseur de l'auxiliaire se détermine, comme nous venons de le faire, par la relation $M' = PR'(L' - d)$.

L'auxiliaire sera donc composé ainsi :

$$F = \frac{L'^2}{2R'} = 0^m,0008;$$
$$R' = 11^m,68;$$
$$L' = 0^m,137;$$
$$e' = 0^m,023.$$

Quand on détermine l'auxiliaire par la relation $M' = PR'(L' - d)$, il n'est pas nécessaire de chercher l'étagement, il est toujours de la longueur $L' - d$.

En effet, de la relation ci-dessus on tire :

$$L' - d = \frac{M'}{PR'},$$

c'est-à-dire que l'étagement n'est autre chose que $L' - d$.

Les amincissements se font par la méthode ordinaire sur la longueur $(L' - d)$.

L'auxiliaire étant déterminé, il faut chercher l'allongement qu'il éprouve au milieu sous la charge maximum $2P$, afin de savoir s'il peut être en fer ou en bois.

Nous avons vu (chapitre II) que l'allongement d'une feuille complétement aplatie est donné par la formule très-simple

$$\alpha = \frac{e}{2r}.$$

Nous avons donc pour l'allongement de l'auxiliaire :

$$\alpha = \frac{e'}{2R'} = \frac{0{,}023}{2 \times 11{,}68} = 0{,}00098.$$

A la rigueur cet auxiliaire peut être encore en fer, mais en général il est prudent de ne pas dépasser 0,0008 comme allongement du fer.

Il est du reste toujours facile d'obtenir l'allongement que l'on veut. Pour cela il n'y a qu'à diminuer l'épaisseur de l'auxiliaire en conservant le même rayon. Mais alors on est conduit à faire l'auxiliaire en plusieurs feuilles, et par conséquent, d'après ce qui a été dit, à en augmenter le volume; il est donc toujours préférable, chaque fois que cela est possible, de faire l'auxiliaire d'une seule feuille.

Ainsi pour le ressort que nous venons de calculer, si on voulait que l'allongement de l'auxiliaire ne fût que

de $0^m,0006$, on chercherait d'abord l'épaisseur correspondante au moyen de la relation

$$e'' = 2R'\alpha = 2 \times 11,68 \times 0,0006 = 0,014.$$

L'étagement sera alors :

$$l_1 = \frac{M''}{PR'} = \frac{343}{1750 \times 11,68} = 0,0168,$$

et le nombre de feuilles

$$n = \frac{L' - d}{l_1} = \frac{0,067}{0,0168} = 5.$$

Il faudrait donc 5 feuilles de $0^m,014$ au lieu d'une feuille de $0^m,023$.

Cherchons la différence des volumes ou des poids, on trouve :

Poids de l'auxiliaire en une seule feuille. .	$3^k,04$
Poids de l'auxiliaire en cinq feuilles. . . .	$3^k,50$

On voit par cet exemple combien, pour obtenir un allongement un peu moindre, l'épaisseur du ressort augmente rapidement ainsi que son volume. Il est donc toujours préférable, quand on le peut, ce qui du reste, comme je l'ai dit déjà, a lieu le plus souvent, de faire l'auxiliaire d'une seule feuille.

On peut aussi, pour pouvoir faire l'auxiliaire en fer ou en bois, faire l'inverse, c'est-à-dire laisser l'épaisseur de l'auxiliaire la même et augmenter son rayon. Alors il s'ensuit seulement que le contact de l'auxiliaire avec le ressort proprement dit commence au delà de la charge normale, et que l'allongement du centre du ressort proprement dit, quand ce contact commence, est plus grand.

Il est assez rare de pouvoir faire, sans la précaution précédente, des auxiliaires en bois, parce qu'ordinairement on est limité par l'épaisseur totale du ressort. Il est du reste très simple de chercher toujours quelle

serait l'épaisseur d'un auxiliaire en bois correspondant à l'épaisseur de celui en fer, déterminé d'après la méthode ordinaire.

J'ai dit dans les préliminaires que le coefficient d'élasticité de l'acier, qui est aussi celui du fer, était de 20.000.000.000; pour le bois il n'est que 1.300.000.000. Or le moment d'élasticité d'une feuille étant

$$M = \frac{Eae^3}{12},$$

il s'ensuit que les moments de deux feuilles l'une en fer et l'autre en bois, ayant la même épaisseur, varient dans le rapport de

$$\frac{200}{13} = 15{,}37;$$

c'est-à-dire encore que le moment d'une feuille en fer est environ 15 fois plus grand que celui d'une feuille en bois de même épaisseur. Or les moments varient dans le rapport du cube des épaisseurs; il s'ensuit que connaissant l'épaisseur d'un auxiliaire en fer, il suffit de la multiplier par la racine cubique de 15, c'est-à-dire par 2,5, pour avoir l'épaisseur correspondante au bois. On vérifie ensuite si, avec l'épaisseur ainsi trouvée, l'allongement n'est pas trop fort.

On peut prendre comme allongement maximum pour le bois $0^m,00160$.

Voici un exemple d'un ressort avec auxiliaire en bois.

Ressort de suspension pour wagon-écurie, exécuté pour le chemin de fer de l'Ouest (fig. 6).

		mèt.
Données.	Corde de fabrication.	= 0,900
	Largeur des feuilles.	= 0,075
	Charge normale.	= 1300^k
	Allongement correspondant. . . .	= 0,0022
	Flexibilité par 1.000 kil.	= 0,035
	Allongement correspondant à l'aplatissement.	= 0,0035

	1re PARTIE.		2e PARTIE.	
	mét.		*Auxiliaire en bois.*	
Résultats.	$f = 0{,}066$ $e = 0{,}011$ $r = 1{,}571$ $l = 0{,}102$ $n = 3$	Poids : 16 kil.	$f = 0{,}0005$ $R' = 23{,}92$ $e' = 0{,}06$	Allongement : 0,00128

Il arrive quelquefois, par suite de la manière dont la première partie du ressort est composée, que l'auxiliaire a une très-forte épaisseur; ce cas se présente même assez souvent, et cela provient de ce que, cherchant à faire le ressort proprement dit avec le moins grand nombre de feuilles possibles, $\frac{nM}{r}$ est presque égal à QL, et la valeur du rayon R′ de l'auxiliaire étant

$$R' = \frac{nM}{\frac{nM}{r} - QL},$$

il s'ensuit que R′ devient très-grand; et comme le moment de l'auxiliaire est déterminé en fonction de R′, il en résulte, comme je le disais, une grande épaisseur.

Il est toujours possible de réduire notablement cette épaisseur, il suffit pour cela de diminuer le rayon de l'auxiliaire, puisque M′, et par suite l'épaisseur, en dépendent. Seulement il arrive alors que le contact du ressort proprement dit avec l'auxiliaire, commence un peu plus tôt que sous la charge normale; mais la différence est tout à fait négligeable quand le rayon R′ est très-grand. C'est du reste ce qu'un exemple fera mieux voir.

Soit à déterminer un ressort de suspension de wagon à marchandises dans les conditions suivantes :

Charge normale	2.000 kil.
Allongement correspondant	0,0025
Flexibilité par 1.000 kil.	$0^m,0275$
Allongement correspondant à l'aplatissement	$0^m,004$
Largeur des feuilles	0,075
Longueur de la 1re feuille	$1^m,00$

D'après ce qui a été dit, la charge d'aplatissement sera

$$\frac{2000 \times 0{,}004}{0{,}0025} = 3.200 \text{ kil.} = 2P.$$

En déterminant le ressort proprement dit, d'après la méthode qui vient d'être exposée, on trouvera

	mèt.
$f =$	0.076
$e =$	0,013
$r =$	1,625
$l =$	0,1055
$n =$	3

Cherchons l'auxiliaire : il faut d'abord déterminer le rayon

$$R' = \frac{nM}{\frac{nM}{r} - QL}.$$

En substituant dans cette formule les valeurs numériques correspondantes, on trouve

$$R' = 117{,}7.$$

La demi-longueur L' de l'auxiliaire sera 0,183 ; nous aurons alors, en faisant $d = 0^m,06$,

$$M' = PR'(L' - d),$$

ou

$$M' = 4143,$$

d'où

$$e' = e\sqrt[3]{\frac{M'}{M}} = 0^m,057.$$

Sans rien changer au ressort proprement dit, faisons commencer le contact avec l'auxiliaire sous 1.900 kilogrammes, par exemple, au lieu de 2.000 kilogrammes, la différence, pour des charges pareilles, est insignifiante. On aura alors

$$Q' = 950 \text{ kil. au lieu de } 1.000 \text{ kil.}$$

et alors

$$R'' = \frac{nM}{\frac{nM}{r} - Q'L}$$

ou

$$R'' = 25^{m},74 \text{ au lieu de } 117,7$$

En substituant alors R'' à R' dans la formule

$$M' = PR'(L' - d),$$

on en déduira

$$e' = 0^{m},034,$$

épaisseur beaucoup moindre. Seulement, dans ce cas, il faut vérifier une seconde fois l'allongement de l'auxiliaire, qui augmente, puisque le rayon diminue dans une proportion bien plus grande que l'épaisseur, et s'assurer si cet auxiliaire peut être encore en fer ou en bois.

De la réduction du rayon de l'auxiliaire, il résulte encore que l'allongement au milieu du ressort proprement dit est diminué, car, comme on le sait,

$$\alpha = \frac{eQL}{2nM}.$$

Q étant moindre, α le sera évidemment dans le rapport $\frac{Q'}{Q}$.

Remarque sur la détermination de la flèche de fabrication pour les ressorts à auxiliaire.

Il est nécessaire, pour les ressorts à auxiliaire, que la flèche de fabrication soit assez rigoureuse, puisque le contact du ressort proprement dit, avec l'auxiliaire, en dépend.

Dans certains cas, quand on se donne L, la relation $f = \frac{L^2}{2r}$ n'est pas suffisamment exacte : c'est ce qui arrive quand les flèches sont très-grandes, ou que les ressorts sont cintrés sur un petit rayon. Dans ce cas, comme on n'a pas besoin de la flèche pour déterminer les éléments du ressort, on détermine cette flèche directement quand on fait le tracé du ressort. Cependant, si on voulait l'obtenir par le calcul, on se servirait de la formule trigonométrique suivante :

$$f = r\left(1 - \cos\frac{L \times 180}{\pi r}\right),$$

qui donne exactement la flèche. Il faut remarquer que dans cette formule l'arc $\frac{L \times 180}{\pi r}$ est exprimé en degrés et fractions décimales du degré.

Si au contraire au lieu de se donner L on s'était donné la corde de fabrication ou sous-charge, alors évidemment L varierait suivant que la flèche augmenterait, ou que le rayon diminuerait ; dans ce cas, on a pour valeur exacte de L,

$$L = r \operatorname{arc\,cos} \frac{r - f}{2}.$$

On pourra donc avoir toujours exactement la flèche ou la longueur de la première feuille, suivant les valeurs successives des rayons.

Remarque sur la formule de la flexion des ressorts en général.

Quand les flèches, comme je viens de le dire, sont très-grandes, la formule de la flexion n'est plus suffisamment exacte, et il y a lieu de prendre certaines précautions. Pour plus de facilité je vais prendre un exemple.

Supposons qu'entre la flèche déterminée par la formule $f = \frac{L^2}{2r}$ et la flèche réelle, il y ait une différence de $0^m,03$, et supposons qu'on veuille obtenir sous une

certaine charge une flexion de $0^m,300$, dans ce cas il faudra tout simplement déterminer le ressort, comme si la flexion devait être de

$$0,300 + 0,03 = 0,330,$$

et en réalité on n'aura que la flexion voulue.

Mais ce cas se présente très-rarement. Il sera, du reste, toujours très-facile de voir quand il y aura lieu de tenir compte de ce fait dans le calcul d'un ressort; il suffira de chercher la différence existant entre la flèche réelle et la flèche déterminée par la formule

$$f = \frac{L^2}{2r};$$

et si cette différence n'est que de quelques millimètres, on pourra la négliger.

D'après la méthode qui vient d'être exposée pour le calcul des ressorts à auxiliaire, il en résulte qu'on peut faire une infinité de ressorts répondant aux mêmes conditions de flexibilité et de résistance.

En effet, une fois qu'on a déterminé le ressort proprement dit avec le plus petit nombre de feuilles possible, que j'appelle n, on pourrait nécessairement le composer de $n+1$, $n+2$, $n+3$ feuilles, en diminuant successivement l'épaisseur des feuilles, comme il a été dit, dans le rapport des flexions; on arriverait ainsi, d'une manière indirecte, jusqu'au ressort à feuilles d'égale épaisseur. On comprend encore, d'après ce qui précède, que plus on augmentera le nombre des feuilles du ressort proprement dit, plus son volume augmentera, mais aussi plus celui de l'auxiliaire diminuera, puisque son rayon de fabrication, son moment d'élasticité et sa longueur, ne peuvent que diminuer; l'allongement au milieu du ressort ira aussi successivement en diminuant, puisque le terme $\frac{nM}{r}$ augmente

graduellement, tandis que QL reste constant, et qu'on a, comme on le sait, au milieu du ressort,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{nMr - QL}{nM}$$

et

$$\alpha = \frac{e}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho}\right).$$

Néanmoins, cet allongement sous la charge normale au milieu du ressort sera toujours plus fort que dans le ressort à feuilles d'égale épaisseur, ou, ce qui revient au même, plus grand que dans la partie étagée du ressort proprement dit. Mais il ne faut pas, tout en en tenant compte, se préoccuper de cet allongement, qui a lieu au milieu du ressort, car il est très-admissible que le centre du ressort éprouve un allongement plus fort que la partie étagée pour la même charge; en effet, la présence de l'auxiliaire s'oppose fortement aux accroissements de cet allongement sous l'influence des oscillations, de la surcharge, etc., causes qui agissent directement sur le reste du ressort qui n'est pas en contact avec l'auxiliaire.

En général donc, quand on a un ressort à déterminer, il est très-bon de calculer d'abord le ressort à feuilles d'égale épaisseur, puis le ressort à auxiliaire avec le plus petit nombre de feuilles possible n; ensuite avec $n+1$ ou $n+2$ feuilles, on fait alors son choix en prenant en considération le poids du ressort duquel dépend le prix; l'allongement qui a lieu au milieu du ressort, l'épaisseur de l'auxiliaire, qui est quelquefois trop forte, la nature de l'auxiliaire, qui, suivant les cas, est en acier, ou en fer, ou en bois, etc.; enfin on choisit le ressort que l'on admet en toute connaissance de cause.

Légende d'un ressort pour omnibus (fig. 7).

Données.
- Largeur des feuilles . . . . . $0^{m},06$
- Longueur de la 1re feuille. . . . . $1^{m},240$
- Charge normale. . . . . $540^{k},00$
- Allongement correspondant. . . . . $0^{m},002$
- Charge d'aplatissement. . . . . $960^{k},00$
- Flexibilité par 100 kilogr. jusqu'à la charge normale. . . . . $0^{m},018$

Résultats.

1re PARTIE.		2e PARTIE.	
	mèt.	*Auxiliaire en acier ordinaire.*	mèt.
f	= 0,154	R′	= 0,185
e	= 0,010	e'	= 0,017
r	= 1,43	L′	= 0,185
l	= 0,145	α'	= 0,0012
n	= 3		

Poids de la 1re partie. . . $12^{k},70$
Poids de l'auxiliaire. . . $2^{k},30$

Ressorts de traction.

Les ressorts de traction se calculent comme les ressorts de suspension. On peut faire les mêmes types.

Légende d'un ressort de traction exécuté pour les wagons à marchandises du chemin de fer de l'Ouest (fig. 8).

Données.
- Aplatissement du ressort sous. . . . . 5.000 k.
- Allongement correspondant. . . . . $0^{m},005$
- Flexibilité par 1.000 kilogr. jusqu'à 2.000 kilogr. . . . . $0^{m},0208$
- Longueur développée de la 1re feuille entre les points a, b. . . . . $0^{m},840$
- Largeur des feuilles. . . . . $0^{m},0750$

Résultats.

1re PARTIE.		2e PARTIE.	
	mèt.	*Auxiliaire en acier ordinaire.*	mèt.
f	= 0,070	f'	= 0,0031
r	= 1,250	R′	= 7,80
e	= 0,010	e'	= 0,030
l	= 0,040	L′	= 0,220
n	= 5		

Poids de la 1re partie en acier fondu. . . . . $19^{k},30$
Poids de l'auxiliaire en acier ordinaire. . . . $5^{k},80$
Poids total. . . . . $25^{k},10$

Dans ce ressort l'allongement de l'auxiliaire étant de 0,00192, il ne peut être en fer, mais il peut être en acier très-ordinaire.

Les ressorts de choc se calculent aussi d'après les mêmes règles que les ressorts de suspension; seulement, si l'on veut qu'ils puissent amortir un choc répondant à une quantité de travail donnée T, il faut, comme je l'ai déjà dit au chapitre II, qu'ils aient un volume ou un poids déterminé correspondant à cette quantité de travail; car si V est le volume du ressort, les formules démontrent que l'on a Ressorts de choc.

$$T = \frac{EV\alpha^2}{6},$$

c'est-à-dire que T est proportionnelle à V ou au volume.

Donc, quand on aura un ressort de choc à déterminer, on se donnera d'abord la quantité de travail qu'il doit amortir, et on en déduira le volume du ressort; connaissant ce volume, on calculera le ressort d'après les règles données; ce ressort sera, soit à feuilles d'égale épaisseur, soit à feuilles d'épaisseurs croissantes ou décroissantes, ou soit encore à auxiliaire; seulement, comme le travail du ressort varie aussi, comme le quarré de l'allongement, il est donc toujours préférable de faire travailler toutes les parties du ressort à l'allongement maximum, que l'on peut faire, par exemple, égal à $0^m,004$. Cet allongement correspond alors toujours à l'aplatissement du ressort, à moins que le ressort ne soit à feuilles d'égale épaisseur, auquel cas on peut, comme on le sait déjà, faire infléchir le ressort en sens inverse, pourvu que l'allongement maximum ne soit pas dépassé.

Quand un ressort de choc sert en même temps comme

traction, ce qui a lieu ordinairement dans les voitures employées dans les chemins de fer, il faut, avec le volume du ressort, qui est toujours déterminé, atteindre deux buts : pour le choc, une grande flexibilité, au moins en commençant ; et pour la traction, une grande résistance. Au moyen des ressorts à feuilles croissantes on obtient d'une manière satisfaisante ces deux résultats.

Pour cela, on forme le ressort de deux parties distinctes : la première correspond, comme résistance, à l'effort normal de traction et a une très-grande flexibilité pour le choc, seulement jusqu'à cette charge. Dans ce cas il faut évidemment que l'allongement qu'éprouvent les feuilles de cette première partie en leur milieu, soit faible, par exemple 0,002, attendu que ces feuilles éprouvent constamment cet allongement. La deuxième partie sert à compléter le volume pour le choc, et à donner une grande résistance au ressort.

Si les données sont telles, que la première partie ait déjà le volume déterminé pour satisfaire au choc, la deuxième partie se détermine alors comme un auxiliaire ordinaire par la relation $M' = PR'(L' - d)$; dans ce cas l'allongement de l'auxiliaire à l'aplatissement du ressort est plus faible que 0,004, et cet auxiliaire peut être ainsi quelquefois en fer.

Si, au contraire, le volume de la première partie est insuffisant, on détermine l'épaisseur de la première feuille de la deuxième partie par la relation $e' = 2R'\alpha$; α étant l'allongement correspondant à l'aplatissement ; l'épaisseur des autres feuilles, pour compléter le volume, se détermine ensuite par la méthode donnée pour les ressorts à feuilles d'inégales épaisseurs.

Le problème se pose donc ainsi pour les ressorts de choc :

Faire un ressort d'un volume V ayant sous la charge normale de traction $2Q$, une flexibilité i, et les feuilles au milieu du ressort éprouvant sous cette charge un allongement α'; faire aplatir le ressort sous une charge $2P$ correspondant à l'effort supposé maximum de traction, et dont l'allongement correspondant à cette charge serait donné.

Pour déterminer un pareil ressort, on procédera identiquement, pour former la première partie, d'après la méthode générale donnée pour le calcul d'un ressort à auxiliaire; seulement, comme dans ce cas l'allongement α' au milieu du ressort sous $2Q$ est donné, au lieu de déduire le plus petit nombre de feuilles dont pourra être composée cette première partie du ressort, de l'inégalité $\frac{nM}{r} > QL$, il convient de déduire n de la relation

$$\alpha' = \frac{eQL}{2nM},$$

d'où

$$n = \frac{eQL}{2M\alpha'}.$$

Seulement il faudra que l'on ait en même temps $\frac{nM}{r} > QL$; mais cette deuxième condition sera presque toujours satisfaite.

La première partie étant déterminée et son volume n'étant pas encore égal au volume V, l'épaisseur de la première feuille de la deuxième partie se déterminera par la relation

$$e' = 2R'\alpha,$$

R' étant toujours déduit de la formule

$$R' = \frac{nM}{\frac{nM}{r} - QL}$$

et α étant l'allongement maximum correspondant à l'aplatissement. On cherchera le volume de cette première feuille de la deuxième partie que l'on ajoutera au volume de la première partie ; si la somme de ces deux volumes n'est pas encore égale au volume donné, on le complétera, comme je l'ai dit déjà, par la méthode donnée par les ressorts à feuilles d'inégale épaisseur.

Il est évident que, quant au volume et à la flexibilité, on peut se contenter d'une grande approximation ; par exemple, la flexibilité donnée pour la première partie étant de 0,01 par 100 kilogrammes ; si on trouve avec un certain nombre de feuilles une flexibilité comprise entre 0,0095 et 0,01, l'approximation sera suffisante. De même, si on arrive à un ressort pesant 1/16 en plus ou en moins que le poids donné, l'approximation sera encore suffisante.

Légende du ressort de choc et de traction (fig. 9).

Données.

Poids du ressort.	80 kil.
Charge normale	1.000 kil. = 2Q
Allongement au milieu du ressort sous cette charge. . . .	0,002 = α'
Flexibilité par 100 kil. jusqu'à la charge 2Q.	0^m,01
Effort maximum de traction ou charge d'aplatissement du ressort.	5.000 kil. = 2P
Allongement correspondant. .	0^m,004 = α
Longueur de la 1re feuille. . .	1^m,744 = 2L
Largeur des feuilles.	0^m,075

Résultats.

1re PARTIE.	2e PARTIE.
	Une feuille de 0,0225 d'épaisseur.
f = 0,268	R' = 2,826
r = 1,375	l' = 0,202
e = 0.011	f' = 0,050
l = 0,0484	Une feuille de 0,025 d'épaisseur.
n = 7	R'' = 3,125
	l'' = 0,250
	f'' = 0,018

Flexibilité de la 1re partie par 100 kil. . . $0^{m},0095$
Poids total du ressort. . . . . 84 kil.

Les longueurs des feuilles sont déterminées comme toujours en retranchant successivement de la dernière feuille son étagement pour avoir la longueur de la feuille suivante.

Voici un autre exemple de ressort de choc et de traction dont les données étaient les suivantes (*fig.* 10) :

Composer la première partie du ressort *d'une seule feuille*, la flexibilité étant *indéterminée*, mais l'allongement au milieu sous la charge 1.000 kilogrammes ne devant pas dépasser. 0,002

La charge d'aplatissement étant. . . . . 3.000 kil.
L'allongement correspondant. 0,004
Et le poids du ressort de. . . . . 25 à 30 kil.
Largeur des feuilles. . . . . $0^{m},075$

Ce ressort est ainsi composé :

	mèt.
Flèche de fabrication.	0,103
Rayon de fabrication.	3,750
Épaisseur de la feuille.	0,030
Longueur de l'étagement.	0,600

Auxiliaire en acier ordinaire ou fondu.

	mèt.
Flèche de fabrication.	0,005
Rayon de fabrication.	7,330
Épaisseur au milieu.	0,028

Longueur développée des feuilles.

	mèt.
Longueur de la 1re feuille entre les points de contact (a, b).	1,760
Longueur totale de la 1re feuille.	1,790
Id. de l'auxiliaire.	0,560
Poids de la 1re feuille. . . . . $25^{k},70$ / Poids de l'auxiliaire. . . . . $7^{k},80$	$33^{k},50$
Flexibilité par 1.000 kil. jusqu'à 1.000 kil.	0,039

Dans cet exemple la deuxième partie du ressort est un vrai auxiliaire, car l'épaisseur est déterminée par la relation $M' = PR'(L' - d)$. Le volume de la première partie étant suffisant, l'allongement de cette dernière feuille n'est plus 0,004, il est déterminé par la relation $\alpha' = \frac{e'}{2R'} = 0{,}00193$. Il peut être en acier très-ordinaire.

On voit d'après cet exemple qu'en ne limitant pas la flexibilité on peut arriver à former la première partie du ressort à volonté de une, deux, trois, quatre feuilles, etc. Seulement, d'après ce qui a été dit, le poids du ressort variera, et ce ressort pourra amortir un choc plus ou moins grand.

Remarque sur les ressorts de suspension, de traction et de choc: 1° dont la maîtresse feuille est terminée en rouleaux, 2° dont les extrémités sont traversées par des boulons qui les relient au châssis.

1° Les ressorts dont la maîtresse-feuille est terminée en rouleaux se calculent d'après les règles ordinaires; seulement la longueur développée de la feuille ne se compte pas à partir du centre des troncs: cette longueur doit être comptée à partir des points a, b, qui sont la rencontre des rayons de fabrication avec la première feuille (*fig.* 8). Il en est de même de la flèche, qui se compte à partir de la corde (a, b) et non à partir de la corde qui joint les deux centres du rouleau. Ordinairement, pour la fabrication, on donne ces deux flèches.

2° Quand les extrémités des feuilles sont traversées par un boulon (*fig.* 14), ce qui a lieu le plus souvent pour les ressorts de locomotive, il y a lieu d'examiner si la maîtresse feuille est encore assez forte et s'il ne faut pas mettre une ou plusieurs feuilles de la même longueur. J'admettrai seulement que dans ce dernier cas la maîtresse feuille, comme cela se pratique maintenant, est munie de part et d'autre du trou par lequel passe le boulon, de deux mamelons destinés à reporter

la pression transmise par l'écrou dans la section qui correspond à l'axe du boulon (*fig.* 15).

Cela posé :

1°Si l'étagement l est plus petit que le rayon ob (*fig.* 14) du boulon, évidemment pour que la deuxième feuille pût glisser, il faudrait l'entailler, et par conséquent diminuer sa section ; dans ce cas il faut mettre des feuilles égales en longueur à la première, jusqu'à ce que la somme des étagements soit un peu plus grande que le rayon du boulon. Quand au contraire, ce qui a presque toujours lieu, l'étagement l est plus grand que le rayon du boulon, alors sous la réserve de la condition qui va être exprimée plus bas on peut terminer le ressort d'après les règles ordinaires ;

2° Pour que la première feuille traversée par le boulon soit assez forte, il faut que l'on ait

$$\frac{u}{\sqrt{a^2 - 4u^2}} = \frac{nl}{a},$$

formule dans laquelle u est le rayon du boulon, a la largeur de la feuille, l l'étagement et n le nombre des feullles traversées par le boulon.

Si l'on fait n égal à 1 et que l'on ait encore

$$\frac{u}{\sqrt{a^2 + 4u^2}} = \frac{l}{a},$$

c'est qu'une feuille est suffisante ; si le contraire avait lieu, on augmenterait successivement n jusqu'à ce que cette condition soit satisfaite ; le plus ordinairement deux feuilles suffisent.

Je suppose que l'on ait trouvé qu'il faille deux feuilles ; dans ce cas la longueur de la troisième feuille devra être égale à la première, de laquelle on aura retranché

deux fois le double de l'étagement, absolument comme pour un ressort ordinaire.

Telles sont les règles qui servent à déterminer dans tous les cas possibles un ressort quelconque. Je me suis occupé, dans ce manuel, de ressorts dans des conditions aussi variées que possible; on pourrait sans doute en concevoir d'autres; mais tous les cas qui pourront se présenter se résoudront à l'aide des principes exposés dans ce qui précède.

Paris. — Imprimé par E. Thunot et C^ie^, rue Racine, 26

2.

Fig. 4.

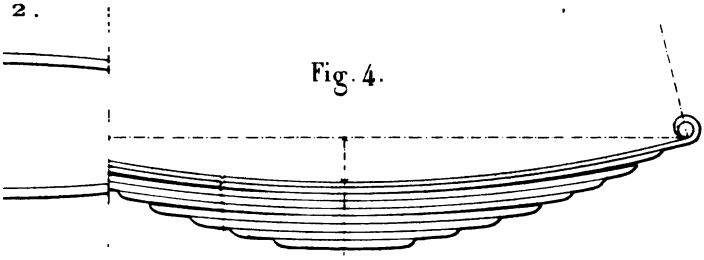
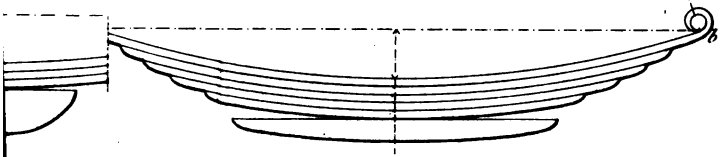


Fig. 8.



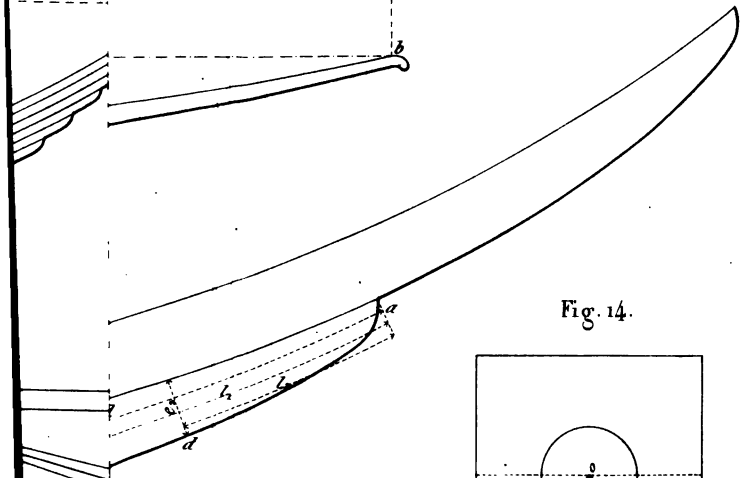


Fig. 14.

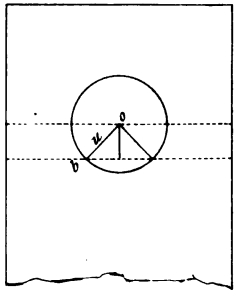


Fig. 15.

Lemaitre

UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06397 8947
DEC 8 1911
OF MICHIGAN